UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

HISTORIA Y ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS DE FUNCIÓN Y CONTINUIDAD

DANIEL VÁSQUEZ S.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1996

T.H

Aprobado por:

Jorge Eliécer Hernández

PROF. JORGE HERNANDEZ
Director de Tesis

Jaime Gutiérrez

PROF. JAIME GUTIERREZ
Miembro del Jurado

Germán Beitia

PROF. GERMAN BEITIA
Miembro del Jurado

Fecha: 20 de diciembre de 1996.

DEDICATORIA

A mis padres y hermanos quienes siempre me brindaron el apoyo necesario y me dieron voz de aliento para seguir adelante.

AGRADECIMIENTO

Doy gracias a Dios Todopoderoso por iluminarme y darme fortaleza para culminar una etapa más en mi preparación académica.

Al **Prof. Jorge Hernández,** mi más sincero agradecimiento por orientarme y ofrecer, desinteresadamente, parte de su valioso tiempo para dirigir y supervisar en forma efectiva este trabajo.

Al **Prof. Jaime Gutiérrez,** quien en ningún momento se negó a brindarme toda la ayuda necesaria en el instante que la solicité.

A la **Prof. Guadalupe de Castillo** quien tradujo parte del material bibliográfico utilizado aquí.

A todos mis compañeros de estudio con quienes compartí gratos momentos.

Además, agradezco a todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron para que este trabajo hoy día sea una realidad.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo III

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE DISCONTINUIDADES DE UNA FUNCIÓN

Resumen

Este trabajo está dirigido a estudiar el desarrollo y evolución de los conceptos de función y continuidad de tal modo que podamos romper con la concepción errónea que tienen muchos estudiantes al pensar que toda función se puede graficar; que si una función es continua su gráfica consiste de un solo trozo y que una función no puede tener muchas discontinuidades. Inicialmente se presenta un estudio histórico de las nociones de función y de continuidad, así como los obstáculos epistemológicos que explican su evolución. Se estudia además, el conjunto de Cantor y se prueba que la función de Cantor es continua en todo punto de [0,1], a pesar de que su gráfica no está compuesta de un solo trozo. Finalmente se demuestra la no existencia de una función continua en el conjunto de los números racionales y discontinua en los irracionales.

Summary

The present work intends to study the development and evolution of the concepts of function and continuity in such a way that the misunderstandings around this ideas are cleared up. To be precise we would like to change the idea that all functions can be graphed, that the graph of all continous functions are made up of one piece piece, and finally that a function cannot have many discontinuities. At first, we present a historical study about some aspects of the function and continuity, as well as the epistemological obstacles, which explain their evolution. We will study Cantor`s set and prove that Cantor`s function is continous at every point on [0,1], in spite of the fact that, its graph is not compounded of only one piece. Finally, we will show that does not exist a function which is continous on the set of rational numbers and discontinous in each irrational numbers.

INTRODUCCIÓN

La noción de función y la de continuidad, estrechamente relacionadas entre sí, son fundamentales en el cálculo y el análisis así como en muchas otras ramas de la matemática las cuales estudian características muy particulares de estos conceptos.

Aunque hoy día podemos encontrar una definición precisa de estos conceptos, su evolución tomó muchos años y enfrentó un sinnúmero de dificultades, las cuales son desconocidas por muchos estudiantes, pues la bibliografía referida a este tema en particular es escasa en nuestras bibliotecas y la poca existente hacen un estudio breve e incompleto del tema.

El problema que presenta este tema radica en el hecho que, por lo común, la mayoría de los estudiantes piensan que la gráfica de una función continua está hecha de un solo trozo, hecho éste que los llevan a cometer errores: Como el pensar que los puntos de discontinuidades de una función forman un conjunto discreto.

En las primeras etapas del desarrollo del cálculo, las relaciones entre variables eran casi siempre continuas. La continuidad quedaba reflejada en su gráfica; la cual era una curva que podía ser trazada sin levantar el lápiz de la hoja.

En general, solo se consideraban funciones analíticas que, naturalmente, eran continuas.

Con el desarrollo del concepto de función, durante el siglo pasado, en las obras de Fourier, Cauchy, Bolzano y otros científicos, se inicia la consideración de la continuidad como una propiedad que puede o no tener una función. El descubrimiento de funciones que en ningún punto tienen derivada y que representan fenómenos de difusión, mostró de manera contundente que el análisis de la continuidad separada de otras propiedades íntimamente relacionadas como la derivada y la integrabilidad no eran un mero afán de realizar abstracciones, sino que eran necesidades reales planteadas al desarrollo del análisis a través de sus vinculaciones con las ciencias físicas: Era una nueva etapa en el estudio matemático del movimiento, que requería de un instrumento más desarrollado, conceptualmente más claro.

Surge entonces de éstas y de muchas otras situaciones que no hemos mencionado aquí, la necesidad real de profundizar en los conceptos de lo continuo y lo discontinuo.

Dada la situación antes expuesta, nos planteamos la necesidad de elaborar este trabajo, el cual lo hemos dividido en tres capítulos:

En el primer capítulo presentamos un estudio del desarrollo histórico de los conceptos de función y de continuidad desde tiempos antiguos; así como de los obstáculos que han tenido que superar hasta llegar a las definiciones que manejamos hoy dia. En el segundo capítulo se estudia la función de Cantor, en la cual se demuestra que la continuidad y la discontinuidad de una función son atributos del nexo funcional entre las variables que estamos sometiendo a estudio, razón por la cual no se puede tratar la gráfica de la función como un objeto concreto para abstraer conclusiones. Finalmente, el tercer capítulo se ocupa del estudio del conjunto de discontinuidades de una función, cuyas propiedades permitirán demostrar la no existencia de una función continua en el conjunto de los números racionales y discontinua en los irracionales.

CAPÍTULO I

EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

1.1 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN TIEMPOS ANTIGUOS Y EN LA EDAD MEDIA

El concepto de función es una noción antigua, utilizada por la humanidad desde épocas remotas. Los matemáticos y filósofos de la Antigua Grecia, aunque no encontramos en ellos la idea de dependencia funcional expresada en forma explícita como un objeto de estudio comparativamente independiente, no se puede dejar de mencionar el gran surtido de correspondencia funcional estudiadas por ellos. Los métodos para definir una función, como por ejemplo, por una tabla, una descripción verbal, una gráfica, una regla cinemática y otros, fueron todas vistas por ellos, completamente desarrolladas y estudiadas en varios aspectos. Por ejemplo, en las matemáticas griegas, la parábola era definida como una sección cónica y su ecuación no intervenía en su definición.

La idea de dependencia funcional fue desarrollada, no solo en los trabajos de antiguos griegos (expresada principalmente en la forma de tablas de varias clases) sino también desarrollada significativamente en los textos astronómicos babilónicos de la era Seleucial y en los escritos de Ptolomeo; así como en los trabajos de AL-BIRUNI desde la primera mitad del siglo XI.

AL- BIRUNI además de tener un gran surtido de varias dependencias de cantidades dadas en la forma de tablas y por descripción verbal, parece haber sido el primero en estudiar ciertos aspectos generales para una gran cantidad de funciones manejadas por él. De algún modo él caracterizó sus dominios de definición, determinó puntos extremos y los valores de las funciones en esos puntos y estudió las reglas para interpolación lineal y cuadrática. Sus ideas sin embargo, evidentemente no tenían influencia real sobre sus contemporáneos y sucesores inmediatos.

Un mayor desarrollo de la idea de dependencia funcional ocurre en Europa Medieval. En los trabajos de Bradwardine, Swineshead, Huylesbury, Oresme y otros sabios de este periodo matemático la idea de dependencia funcional es vista como una herramienta fundamental para estudiar el mundo físico; las ideas de las leyes naturales como leyes de tipo funcional empiezan a tomar forma; allí se levantan en forma rudimentaria una teoría de variación de cantidades como funciones de tiempo y la representación gráfica de ellas, cuyas fuentes deben quizás ser buscadas en la Astronomía Babilónica. El concepto general de dependencia funcional (a pesar de la restricción), del cual un equivalente fue posteriormente el concepto de función, es introducido en forma explícita; y cuando ésto es hecho, términos especiales son introducidos para denotar las variables independientes y dependientes. Los rudimentos de consideraciones infinitesimales reaparecen en el estudio de dependencias funcionales; la forma más simple de movimiento mecánico es estudiado como ejemplo de tales dependencias.

1.2 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XVII.

A pesar de que diversas clases de dependencia funcional habían sido ampliamente estudiadas en tiempos antiguos, claramente la introducción del concepto de función en forma explícita fue en el XVII, que más tarde empieza a adquirir la categoría de un importante e independiente concepto matemático.

Durante el siglo XVII el cálculo estuvo ligado estrechamente a las investigaciones relacionadas con curvas, debido a que no había aún un concepto explícito de variable o de relación funcional entre variables. Las primeras curvas que se estudiaron fueron las heredadas de los griegos: las secciones cónicas, la cuadratriz de Hippias, la espiral de Arquímedes, la concoide de Nicomedes y la Cisoide de Diocles. Según iba avanzando el siglo estas curvas se vieron acompañadas por otras, entre las cuales podemos mencionar la cicloide y las parábolas e hipérbolas de orden superior.

Cuando los griegos descubrieron la existencia de magnitudes inconmensurables, hicieron de la geometría el fundamento de la parte de la matemática que no era teoría de números, siendo la línea recta el sustituto de un cuerpo continuo de números. Esto dio como resultado el álgebra geométrica en la que se basaron Euclides, Arquímedes y Apolonio para sus cálculos.

Con el paso del tiempo, la teoría de ecuaciones terminó por separarse de la geometría y se fue desarrollando gradualmente en ella una cantidad de simbolismos.

Hasta en los tiempos de Descartes y Fermat la aritmética está contenida en la geometría. Un cambio radical se produce cuando estos dos matemáticos crean la geometría analítica: Es el pasaje de la era de una aritmética geometrizada a aquella de una geometría aritmetizada. El descubrimiento de el método analítico de definir una función está ahora relacionado con estos dos nombres.

1.2.1 RENÉ DESCARTES (1596-1650).

René Descartes fue el primero en indicar claramente que una ecuación contiene dos variables, en la cual es posible determinar todos los valores de una de ellas dado los valores de la otra. En sus trabajos Descartes relaciona una curva plana algebraica con una ecuación entre las coordenadas de sus puntos. Las coordenadas están consideradas como segmentos. Él distingue la clase de curvas algebraicas (que son expresables en términos de ecuaciones) que denomina geométricas, y aquellas curvas mecánicas o no geométricas, es decir, todas las otras y él considera que estas últimas no dependen de su método y se interesa en curvas geométricas que había clasificado en:

- Curvas de primer género: Aquellas que son descritas por las ecuaciones de segundo grado;

- Curvas de segundo género: Aquellas que son descritas

  por las ecuaciones de tercer y cuarto grado;

- Curvas de tercer género: Aquellas que son descritas por

  las ecuaciones de quinto y sexto grado.

Sólo las funciones algebraicas son expresadas analíticamente. Aquí la concepción de continuidad toma un carácter geométrico ligado a las curvas.

1.2.2 PIERRE FERMAT (1601-1665).

Alrededor de 1636 Pierre Fermat introduce el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, en el que presenta una característica notable como es la idea de dar un incremento a una magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente. Esta invención no provocó interés para la noción de función ni para la noción de continuidad.

1.2.3 ISAAC NEWTON (1642-1727).

El puente de la primacía de la curva a la primacía de la fórmula y de la definición implícita a la explícita de funcion es aparentemente creación de Newton.

Newton, uno de los creadores del cálculo diferencial e integral, siguiendo a su maestro Barrow, escoge el tiempo como noción universal e interpreta las variables dependientes como cantidades que "se escapan" de manera continua y poseen una velocidad de cambio. En su cálculo de fluxiones encontramos la cinematización del concepto de función. Una fluente es una cantidad que esta en proceso de cambio y la fluxión de la fluente es la velocidad a la cual esta última cambia. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente: Si alguien traza una recta con un lápiz, la longitud de la línea es la fluente, mientras que la fluxión, en todo momento, es la velocidad instantánea del lápiz en ese instante.

Con Newton aparece una concepción de la noción de curva donde ésta es generada por el movimiento de un segmento ordenado (vertical) tal que un extremo se desplaza sobre la línea base (nuestro eje de las abscisas) y el otro describe la curva. Esta última es entonces la trayectoria de un punto (extremidad del segmento) móvil y no un conjunto de puntos que poseen una cierta propiedad. Esto es una curva continua, en el sentido que ella está representada por un trazo continuo.

Newton, aunque ha intentado describir el concepto de función en el lenguaje de geometria y mecánica, en realidad trabajó con funciones como expresiones analíticas compuestas de variables y constantes. Para exhibir tales expresiones él usó los términos "curva u ordenada".

1.2.4 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716).

El cálculo de Newton y Leibniz trataba de cantidades variables. Newton consideraba estas cantidades como variando con el tiempo mientras que Leibniz las consideraba más bien como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos.

La palabra función apareció por primera vez en un manuscrito de Leibniz en agosto de 1673 titulado "METHODUS TANGENTIUM INVERSA SEU DE FONCTIONIBUS" Leibniz emplea la expresión "functionem faciens" o abreviado "funtio" para designar las cantidades cuyas variaciones están ligadas por una ley.

Años más tarde Leibniz expresó la idea general de dependencia funcional, introduciendo el término "función" y el símbolo correspondiente para todos los segmentos relacionados con la curva y tales que su longitud depende de la posición del punto sobre la curva (ordenadas, segmentos de tangentes, subtangentes, normales, subnormales).

En 1692, cuando Leibniz tenía 46 años, escribió un artículo titulado "De Linea Ex Leineis Numero Infinito Ordinatium Ductis" en el cual introduce por primera vez las palabras abscisa y ordenada de un punto y muchas otras notaciones que pertenecen a la terminología actual, y que son de uso corriente en la matemática.

Por otra parte, Leibniz también enuncia "el principio de la ley de continuidad":

"Nada se hace por saltos en la naturaleza y un ser no pasa nunca de un estado a otro sin pasar por todos los diferentes estados que pueden concebirse entre ellos." [12, p 73]

Así, ningún ser pasa de un estado a otro sin pasar por los estados intermedios; de manera que no se puede ir de una ciudad a otra sin recorrer el camino que hay entre las dos".

La noción de continuidad está ligada a la idea de cambio continuo en el tiempo (con Newton) y en el espacio (con Leibniz).

1.2.5 JOHANN BERNOULLI (1667-1748).

La correspondencia de Leibniz con Johann Bernoulli durante 1694-1698 trata de la necesidad de un término general para representar cantidades arbitrarias sobre alguna variable dependiente. Pronto esto causaría el uso del término función en el sentido de una expresión analítica.

En 1718, finalmente aparece en impresión la definición del concepto de función dada por Johann Bernoulli:

"Una función de una variable es definida como una cantidad formada de alguna manera de esta variable y constantes." [21, p 41]

En este mismo documento encontramos un moderno simbolismo para denotar una función: φx.

La definición anterior habla de una "cantidad" formada de alguna manera de una variable y constantes y no dice nada acerca de alguna obligación de definir la cantidad como una fórmula. No obstante, este último significado resultó del contenido del trabajo de Bernoulli y fue en esta forma que los matemáticos lo adoptaron. Fue evidentemente por esta razón que Euler, 30 años después, modifica la definición de Bernoulli.

1.3 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XVIII.

Durante el periodo de Leibniz y de los primeros Bernoulli el cálculo consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas y los objetos principales que se manejaban eran cantidades geométricas variables tal como aparecían en esos problemas. Sin embargo, según se fueron haciendo cada vez más complicados los problemas y el manejo de las fórmulas cada vez más confuso, el origen geométrico de las variables se fue haciendo más remoto, y así el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas. Euler vino a reforzar esta transición al afirmar explícitamente que el análisis es una rama de las matemáticas que trabaja con expresiones analíticas y especialmente con funciones.

1.3.1 LEONARD EULER (1701-1783).

Los trabajos de Euler han permitido un gran desarrollo del análisis gracias a la elaboración de la teoría de funciones. El curso que él ha presentado a la época sigue un plan y esquema que encontramos en el corazón del análisis de hoy día.

Con Euler la noción de función se transforma en esencial: Todos sus tratados de matemática se ordenan alrededor de esta noción que él comienza por definir. Es el primero que utiliza el símbolo f(x) para referirse a una función de variable x.

Euler reserva su primer volumen de "Introductio in Analysis Infinitorum" a la teoría algebraica de funciones. Allí él propone, entre otras cosas, una clasificación de funciones en algebraicas o trascendentales, explícitas o implícitas, uniformes o multiformes. Euler define primero una función como:

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de alguna manera por esta cantidad variable y números o cantidades constantes." [24, p 220]

Para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tantos valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica se forma, según él, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias, raíces y soluciones de ecuaciones algebraicas. A ellas

Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, ln z y las funciones trigonométricas. Finalmente, en la clase de operaciones admisibles fue incluida la integración.

Todas las funciones las consideraba como representadas por una serie de potencias:

$$f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

(donde z, en términos generales, es complejo). El recurso fundamental que permitía reducir las funciones a una forma cómoda para operar con ellas era su desarrollo en serie de potencia.

Euler llama las funciones definidas en el volumen 1 de su Introductio in Analysis "funciones continuas". El admite funciones más generales definidas por una ley de dependencia arbitraria que califica como "funciones mecánicas". Euler define así las funciones continuas:

"**Aquellas donde todos los valores están ligados por una misma ley o dependen de la misma ecuación.**" [12, p 75]

Así, una función que no es continua es un conglomerado de funciones continuas.

Las funciones continuas en el sentido de Euler son aquellas definidas por una sola expresión analítica. A continuación él distingue las funciones "continuas" de las "discontinuas" o "mixtas". Estas últimas son las funciones definidas por diferentes expresiones en diferentes intervalos del dominio de la variable, tal como por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Las funciones continuas en el sentido de Euler corresponden a nuestras funciones derivables mientras que las "discontinuas" o "mixtas" en el sentido de Euler son nuestras funciones continuas pero que presentan puntos angulares o funciones continuas por pedazos.

Hacia la última mitad del siglo XVIII la concepción de función no respondía suficientemente a todas las necesidades de la ciencia. La necesidad en astronomía y física matemática ha de guiarnos al nuevo método analítico para describir dependencia funcional (las series trigonométricas).La acumulación de expansiones parciales (de funciones en series trigonométricas) en el siglo XVIII fue evocado principalmente por varios problemas de la matemática aplicada, que no pudieron ser expresados por más tiempo en una forma simple. Ellos no pudieron ser escritos en la forma de una serie de potencia finita o infinita. Esto hizo necesario el aplicar nuevos métodos para su descripción analítica. Un papel significante en todo esto fue jugado por las famosas polémicas sobre la **cuerda vibrante**.

Una curiosa situación surge cuando el desacuerdo sobre el problema de la cuerda vibrante hizo necesario penetrar más profundamente en la naturaleza del concepto de función; cuando funciones de naturaleza más general fueron encontradas, estos mismos matemáticos, Euler y Lagrange, ahora basando sus argumentos en interpretaciones geométricas se mostraron en contra del enfoque esencialmente analítico de D. Bernoulli (el cual no estaba todavía desarrollado y no estaba suficientemente fundamentado) aunque ellos lo hicieron en contradicción con sus propios enfoques fundamentales.

Euler encontró la salida a esta contradicción formulando un nuevo y extremadamente general concepto de función, al cual muchas circunstancias lo guiaron. En 1755 él se expresó como sigue:

"**Cuando ciertas cantidades dependen de otras de tal manera que ellas experimentan un cambio cuando la segunda cambia, entonces las primeras son llamadas funciones de las segundas.**" [21, p 47]

Euler abandona con esta definición las expresiones analíticas como la esencia principal de la definición de una función.

1.3.2 JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813).

Desde que la noción de función había cambiado el concepto central del análisis por la mitad del siglo XVIII y la definición de una función en la forma de una expresión analítica representada por una serie de potencia había sido aceptada, había un intento natural de tomar esta definición como punto de partida para el principio de todo el análisis. Fue asi como procedió Lagrange.

Los trabajos de Lagrange han jugado un gran papel en el desarrollo de los fundamentos del análisis y de la elaboración de una teoría de funciones independientes de cantidades infinitamente pequeñas. El titulo de su tratado es un testimonio de sus esfuerzos: "Teoria de Funciones Analíticas, conteniendo los principios del cálculo diferencial, liberado de cualquier consideración de infinitesimales o limites que desaparecen y de fluxiones reducidos al análisis algebraico de cantidades infinitas".

Lagrange trata de sistematizar toda la práctica del análisis algebraico del siglo XVIII para dar a los matemáticos bases rigurosas. En la misma perspectiva formalista de Euler, él funda su tentativa sobre la teoría del desarrollo de funciones en series de potencia.

En la Teoria de Funciones Analiticas, Lagrange presenta la siguiente definición:

"Llamamos función de una o varias cantidades a cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos sólo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes."
[12, p 79]

Lagrange hace la observación que esta definición de función es más general que aquella dada por los primeros analistas:

"La palabra función ha sido empleada por los primeros analistas para designar en general las potencias de una misma cantidad. Después se ha extendido el significado de esta palabra a toda cantidad formada de una manera cualquiera de otra cantidad." [10, p133]

Con Lagrange la concepción de función es aquella de las funciones "continuas" en el sentido de Euler. Las funciones consideradas son de la forma P, P/Q, P^{α} , siendo α un número racional y P y Q dos polinomios.

Es en la demostración de un teorema considerado como "uno de los principales fundamentos" de su teoría que Lagrange define implícitamente las continuidad. Este teorema se enuncia así: "La función f(x+i) siendo desarrollada en serie de potencia puede siempre tomar i muy pequeño para que un término cualquiera sea más grande que la suma de todos los términos que le siguen y eso debe tener lugar también para todos los valores más pequeños que i". La demostración de este teorema, por Lagrange, está basado sobre la idea geométrica de la continuidad que él define de manera implícita:

"Se podrá siempre encontrar una abscisa i correspondiente a una ordenada inferior que una cantidad dada y entonces todo valor más pequeño que i corresponderá también a ordenadas inferiores que la cantidad dada." [12,p80]

Este es el primer paso hacia una definición de la continuidad por comprensión, es decir, por el enunciado de una propiedad que deberán satisfacer las abscisas y ordenadas.

1.3.3 M. J. A. CONDORCET (1743-1794).

Condorcet estuvo en posesión de un concepto de función que es, con respecto a la definición de Euler, más general. En 1779, revisando sus cursos del año 1767 sobre cálculo integral él empezó como sigue:

"Asumo que tengo un cierto número de cantidades x, y, z, ...,F y que para cada valor definido de x,y,z etc., F tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que F es una función de x, y, z,..." [21, p48]

En este relato Condorcet conscientemente enfatiza que el método de definir una función puede no necesariamente requerir de una expresión explícita, como una fórmula analítica o en la forma de una ecuación definida implícitamente. Él dijo francamente que la dependencia de F sobre x, y, z,... puede mantenerse "siempre y cuando no se conozca ni el sentido en que F está expresado ni el tipo de ecuación".

De este modo, la noción de función como una dependencia arbitraria entre variables no necesariamente definidas por una relación analítica, fue completamente extendida a la vuelta del siglo XIX.

1.3.4 LOUIS ARBOGAST (1759-1803).

Como los otros matemáticos de la época Arbogast adopta el punto de vista euleriano en cuanto a la continuidad de una función, aportando algunas presiciones:

"Cuando la abscisa x varía, la ordenada y no puede pasar bruscamente de un valor a otro, es decir, no puede haber saltos de una ordenada a otra que difiera de una cantidad asignable." [12, p80]

La continuidad en el sentido de Euler puede ser destruida en estos dos casos:

"1. La función puede cambiar de forma, es decir, la ley según la cual la función depende de la variable puede cambiar de un solo golpe" "no es necesario que la función allí sea expresada para un cierto intervalo por una ecuación; ella puede continuamente cambiar de forma y en vez de estar como una unión de curvas regulares puede ser tal, que cada uno de sus puntos se transforme en una curva diferente, es decir, ella puede estar enteramente irregular y no seguir ninguna ley para ningún intervalo por muy pequeño que sea.

"2. La ley de continuidad también se rompe cuando las diferentes partes de una curva no están unidas unas con otras".

En el segundo caso Arbogast hace una distinción particular entre las funciones continuas y las funciones discontinuas (continuas por pedazos) en el sentido como nosotros empleamos esos términos hoy. Él separa las funciones "discontinuas" en el sentido euleriano (en el primer caso) de las funciones discontiguas (funciones con saltos). La terminología se transforma de "continua" y "discontinua" en el sentido de Euler, por "discontigua" lo que corresponde a nuestro sentido de discontinuidad. Arbogast no da sin embargo ninguna definición de continuidad o de discontinuidad. Él hace esta distinción en una obra que se refiere a la naturaleza de funciones arbitrarias a admitir en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Arbogast pensaba entonces que era posible utilizar funciones con derivadas discontinuas y funciones discontinuas en puntos aislados que él llamaría "discontiguas".

1.3.5 SYLVESTRE FRANCOIS LACROIX (1765-1843).

En su fundamental tratado Lacroix dijo lo siguiente: "Los viejos analíticos en general entendieron una función de una cantidad para denotar todas las potencias de esa cantidad. Más tarde, el significado de esta palabra fue ampliado y aplicado a los resultados de operaciones algebraicas. De este modo, alguna expresión algebraica formada de alguna manera de sumas, productos, potencias y raíces de esas cantidades fue también llamada una función.

Finalmente, las nuevas ideas que surgieron como resultado de los progresos del análisis condujeron a Lacroix a presentar la siguiente definición de función: **"Cada cantidad, el valor de la cual depende de una o varias cantidades, se denomina función de estas últimas independientemente de que sepamos o no por que operaciones es necesario atravesar para pasar de estas últimas a la primera."** [24, p 229]

Él no sólo introdujo esta definición dentro de sus cursos básicos, sino que también lo declaro en algunos de sus libros de texto fundamentales sobre análisis matemático, así como en la segunda edición de su obra "Traite du calcul diferentielle et du calcul integral" en 1810. Esto es esencialmente una reformulación de la definicion de Euler dada anteriormente pero con enfasis sobre la falta de restricción sobre las operaciones que debieron ser aplicadas sobre los valores del argumento para obtener los valores de la función.

1.4 DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XIX

El siglo XIX es el periodo de transición del cálculo al análisis matemático. Al considerar el concepto de función como la idea principal de este nuevo análisis, se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como correspondencias de tipo muy general.

Se pueden considerar como principales representantes de la evolución del concepto de función a Cauchy, Bolzano, Dirichlet y Riemann. Las funciones discontinuas son consideradas como patológicas y sólo aquellas que son continuas son consideradas como funciones auténticas.

1.4.1 JOSEPH FOURIER (1768-1830).

En sus trabajos sobre la propagación del calor, Fourier sostiene que las funciones arbitrarias, discontinuas, pueden ser representadas por desarrollos en series trigonométricas. A causa de su clasificación de funciones en continuas y mixtas, Euler rechaza la proposición de Fourier y sostiene que no se puede representar la forma inicial de la cuerda (problema de la cuerda vibrante) siendo definida sobre dos partes de un intervalo finito, dado por dos ecuaciones diferentes, por una serie trigonométrica.

En 1807, Fourier rompe con la noción de continuidad euleriana y trata las funciones como leyes de correspondencia numéricas definidas sobre un intervalo de la recta.

En su obra "**Theorie Analytique de la Chaleur**" Fourier presenta una matematización de un nuevo campo de fenómenos físicos "la transmisión del calor" en la cual da una respuesta afirmativa a la pregunta de si una función arbitraria (la cual puede ser discontinua) puede ser representada por una serie trigonométrica.

Fourier mostró que la solución de la ecuación diferencial que representa la difusión del calor puede ser escrita como:

$$f(x)= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

donde los coeficientes se determinan por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

en la cual f(x) podía ser continua o discontinua.

A la frase "función arbitraria" le fue dada un significado general por Fourier. En su obra él da una definición al término función como sigue:

"La función fx designa una función completamente arbitraria, es decir, una sucesión de valores dados subordinados o no a una ley general y correspondientemente a todos los valores de x, comprendidos entre cero y cualquier magnitud x." [24, p 229]

No es por casualidad que Fourier dio un significado general al término función. El fenómeno que él estaba estudiando fue descrito en el lenguaje de ecuaciones diferenciales parciales y las integrales generales de cada ecuación contienen funciones que asumen las más diversas formas en casos específicos: Pudieron ser definidas por alguna expresión analítica conocida en el dominio entero de definición o estar representada por diferentes expresiones analíticas para diferentes valores del argumento; podrían ser continuas o discontinuas o asumir valores infinitos, etc.

Fourier fue el primero en introducir funciones discontinuas en un número finito de puntos.

1.4.2 BERNHARD BOLZANO (1781-1848).

Bolzano es uno de los primeros matemáticos en rehacer las demostraciones de ciertos teoremas basados sobre evidencias geométricas. Él ataca las demostraciones del teorema del valor intermedio, donde una de las más corrientes es: El grafo de una función real de una variable real continua, si ella es positiva para un punto a y negativa para otro punto b, debe necesariamente cortar el eje de las abscisas en algún punto situado entre a y b.

Bolzano rechaza tales demostraciones que se apoyan sobre consideraciones geométricas. En su demostración del teorema valor intermedio, Bolzano utiliza principalmente el concepto de continuidad. Él da una definición de función continua indicando, por primera vez, que la idea de continuidad es encontrada en la noción de límite.

Bolzano define una función continua sobre un intervalo de la siguiente manera:

"**Decir que una función real f de una variable real x es continua, para todos los valores de x perteneciendo a un intervalo dado no significa otra cosa que: Si x es un valor cualquiera, la diferencia f(x+w) - f(x) puede hacerse más pequeña que toda cantidad dada, si uno puede siempre tomar w tan pequeño como uno quiera.**" [12, p 84]

En sus definiciones Bolzano se sirve de las desigualdades que pueden aplicarse a las funciones arbitrarias. En su trabajo él trata con rigor las propiedades de las funciones continuas; demuestra propiedades fundamentales de funciones continuas sobre un intervalo cerrado, a saber: Ellas son acotadas, alcanzan sus extremos y toman todos los valores intermedios. Él trata de reforzar el concepto de continuidad pero no lo extiende a funciones de varias variables ni a la continuidad uniforme puesto que esas preguntas no le preocupaban.

1.4.3 AGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857).

Cauchy es considerado como el fundador del análisis en el sentido moderno puesto que él formuló, de una manera más rigurosa, los conceptos fundamentales del análisis. Así, en 1821, él propone que las nociones de continuidad, derivada y sumas de series sean aproximadas por un concepto algebraico de límites. Sus proposiciones serían aceptadas puesto que ellas responden a preocupaciones de sus contemporáneos.

El concepto que tiene Cauchy de función no difiere mucho del euleriano porque admite implícitamente que la correspondencia entre la variable y la función está expresada por una combinación de funciones elementales, pero su punto de vista es diferente del de sus antecesores. Para éstos, las funciones tenían carácter cuantitativo; las variables eran siempre números reales determinados y buscaban un resultado numérico, mientras que Cauchy enfoca el problema bajo el aspecto causal y analiza las relaciones generales entre las causas o variables y los efectos o funciones. De esta manera, a partir de él, la teoría de funciones se puede considerar como el estudio abstracto del mecanismo, no limitándose al caso en que las variables fueran reales, sino también en el que sean imaginarias (cuyo manejo espantaba todavía a sus contemporáneos); creando así una de las más bellas y fecundas ramas de la matemática "La teoría de funciones de variable compleja" que tiene numerosas aplicaciones en la técnica moderna.

En esta época y gracias a los trabajos de Cauchy, el conjunto de funciones continuas se transforma en el campo de actividad principal de los matemáticos. En 1821 Cauchy presenta una definición de continuidad, que al igual que Bolzano, no se sirve de la intuición geométrica:

"Sea f(x) una función de variable x y supongamos que para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, ésta función admite constantemente un valor único y finito. Si partiendo de una variable x, comprendida entre esos límites, se le atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función recibirá por incremento la diferencia $f(x+\alpha)$ - f(x) que depende al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x. Puesto así, la función f(x) será, entre los dos límites asignados a la variable x, función continua de esta variable, si para cada valor x intermedio entre esos límites, el valor numérico de el diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otros términos, la función f(x) permanecerá continua con relación a x entre los límites dados, si entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma." [12, p 85]

Esta definición que presenta Cauchy marca un nuevo giro en la historia del análisis. En su Memoria Sobre Las Funciones Continuas (1844) Cauchy muestra que en las definiciones dadas en las obras de Euler y Lagrange falta el rigor matemático. Cauchy demuestra que el hecho de que una función sea continua o discontinua no depende del hecho de que esté definida por una o más expresiones analíticas. Aquí él da un ejemplo de una función definida por dos expresiones analíticas diferentes en intervalos diferentes del dominio de la variable independiente y que puede ser representada por una sola expresión:

$$y = x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$y = -x \quad \text{si } x < 0$$

Esta función sería discontinua en el sentido de Euler puesto que ella está definida por dos expresiones. Como ella también puede ser representada por una sola expresión: $\sqrt{x^2}$ para todo real x, ella sería también continua.

1.4.4 NICOLAS IVANOVITCH LOBACHEVSKI (1793-1859).

En su artículo "Sobre la Convergencia de Series Trigonométricas" (1834) Lobachevski define el concepto de función y expresa la concepción de su época: **"El concepto general exige llamar función de x a un número el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede ser dado o por una expresión analítica o por una condición, la cual ofrece el medio de expresar todos los números y elegir a uno de ellos, o por último, la dependencia puede existir y quedarse desconocida... Una mirada amplia a la teoría advierte la existencia de dependencia sólo en el sentido**

de que los números relacionados unos con otros sean comprendidos como dados conjuntamente." [24, p 229]

Esta definición constituye un comienzo de una nueva evolución del concepto de función.

1.4.5 GUSTAVE LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859).

Fue G. Dirichlet (continuando las investigaciones de Fourier) quien dio la moderna definición de función en un artículo que contenía una cuidadosa presentación de el primer conjunto de condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier. En 1837, en una memoria titulada "Sobre la representación de las funciones arbitrarias en series de seno y coseno", Dirichlet propuso una definición sumamente amplia y general del concepto de función:

"Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x." [26, p 183]

En esta misma memoria él define una función continua así:

"Debemos tomar dos valores fijos a y b y x una cantidad variable asumiendo todos los valores entre a y b. Si ahora un único y corresponde a cada x, y además de tal modo que cuando x varía continuamente sobre el intervalo de a hasta b, y = f(x) también varía continuamente, entonces y es llamada una función continua de x para este intervalo". Geométricamente

descrita, una función continua (es decir, considerando x e y como abscisa y ordenada) es una curva en el que sólo un punto corresponde a cada abscisa entre a y b." [12, p 87]

Dirichlet define el concepto de función de una manera general y lo libera de expresiones analíticas.

Es con Dirichlet que se comienza a interesarse en el estudio de particularidades de la función. Él trata funciones discontinuas que tienen un número enumerable de discontinuidades y es el primero en dar un ejemplo de una función real que no es continua en ningún punto de R:

$$f(x) = c \quad \text{si } x \text{ es racional}$$

$$f(x) = d \quad \text{si } x \text{ es irracional, con } d \neq c$$

He aquí un ejemplo de una función verdaderamente arbitraria definida sobre R. Esta función va a dar al análisis un muy importante contraejemplo (en particular, ella no sería integrable en el sentido de Riemann). Además, tomando c=0 y d=1 se obtiene la función característica del conjunto de los números irracionales. Es el principio de transferir propiedades de la función, de sus singularidades, a su conjunto de definición, o sea un primer paso hacia la topología general.

En 1854, en su curso sobre la integral definida, Dirichlet presenta un teorema sobre la continuidad uniforme, noción que no sería introducida hasta en 1872 por Eduard Heine.

1.4.6 KARL WEIERSTRASS (1815-1897).

Debemos a Weierstrass la construccion de una base aritmética para el análisis. Con el fin de estudiar las propiedades de funciones analíticas, Weierstrass introduce en su curso de nociones de topología general los siguientes conceptos: Conjunto cerrado, conjunto abierto, vecindad de un punto, punto exterior, punto frontera, conjunto conexo.

Hasta Weierstrass, una función continua era considerada como derivable, salvo en ciertos puntos aislados. Era el resultado de la experiencia física que llevaba a creer que una curva continua posee una tangente, salvo quizas, en ciertos puntos Bolzano había ya señalado que esta creencia no era verdadera, pero es Weierstrass quien publicó el primer contraejemplo. En 1872, en efecto, Weierstrass demuestra definitivamente que una función continua puede no ser derivable en ningún punto de su dominio de continuidad. Para eso él construye el primer ejemplo de una tal función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

donde x es una variable real, a un entero impar, b una constante positiva inferior a 1 tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Weierstrass trata de separar la definición de continuidad de la intuición del movimiento continuo que está todavía implícita en las definiciones de Bolzano y

Cauchy, la cual se encuentra en la expresión "Una variable próxima a un límite". El define la continuidad de una función arbitraria así:

"f(x) es continua en ciertos límites de x, si para todo valor x_0 en éste intervalo y para un número positivo y arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un intervalo de x_0 tal que para todos los valores de este intervalo la diferencia $f(x)-f(x_0)$ es, en valor absoluto, inferior a ε." [12, p 90]

Notamos en esta definición la aparición de cuantificadores bajo la forma de expresiones "para todo valor x_0" y "es posible". Estos cuantificadores, que iban a ser después definiciones más elaboradas, faltaban en las definiciones de Cauchy.

Weierstrass se sirve de la propiedad de continuidad de una función para demostrar que toda función real continua puede ser representada por una serie convergente de polinomios. El muestra así que las funciones continuas son parte de la clase de funciones representables analíticamente.

1.4.7 EDUARD HEINE (1821-1881).

Apoyándose en el curso dado por Weierstrass, Heine define así una función continua:

"Una función f(x) se dice continua para un valor particular determinado x=X, si para toda cantidad ε, dada tan pequeña como uno quiera, existe otro número positivo n_0 tal que, para ninguna cantidad positiva n que sea más pequeña que n_0, el valor numérico de $f(x \pm n) - f(x)$ no sobrepasa ε." [12, p 91]

Esta definición se aplica a funciones numéricas de una variable real, puesto que Heine toma como definición de una función la dada por Dirichlet.

Heine precisa igualmente la noción de continuidad uniforme.

1.4.8 BERNHARD RIEMANN (1826-1866).

Riemann prosigue los trabajos de su maestro Dirichlet en lo referente al fundamento del análisis. Desde sus primeros trabajos de 1851, él adopta la definición de una función dada por Dirichlet y define la continuidad de esta manera:

"La función w es continua en un intervalo si cuando z recorre de una manera continua todos los valores comprendidos entre dos valores fijos, la función w de z varía igualmente de una manera continua." [12, p 92]

En una nota encontrada en los manuscritos de Riemann después de su muerte, él da otra definición de la continuidad:

"w es continua, en el intervalo [a,b] conteniendo z, si para una cantidad dada cualquiera ε, se puede siempre determinar la cantidad a de tal manera que en un intervalo relativo a z, más pequeño que a, la diferencia entre dos valores de w no sea jamás más grande que ε." [12, p 92]

Esta definición corresponde a la continuidad uniforme y es probablemente inspirada de la proposición de Dirichlet sobre la continuidad uniforme de una función continua definida sobre [a,b].

1.4.9 RICHARD DEDEKIND (1831-1916).

Para que el argumento y el valor de una función sean considerados como elementos de conjuntos abstractos, es necesario que los conjuntos lleguen a ser un objeto de estudio. Ellos llegaron a ser considerados como tal en la teoría de conjuntos abstractos creada por Cantor, Dedekind y otros.

La definición de funcion fue expuesta primero por Dedekind en 1887. Después de introducir un completo concepto general de conjunto (un sistema en su terminología) él escribió:

"**Por una transformación Ψ de un sistema S significará una ley la cual a cada elemento definido s del sistema le pertenece una cosa completamente definida, llamando imagen de s y denotada por el símbolo Ψ (s). La misma situación puede ser expresada de varias maneras: Ψ (s) corresponde a el elemento s ó Ψ (s) es obtenido de s por la transformación Ψ .**" [21, p 67]

Lo más interesante desde el punto de vista histórico es que al introducir el concepto general de transformación, Dedekind no señaló sus conexiones con el tradicional concepto de función del análisis matemático, aunque estas conexiones pueden estar implícitamente señaladas en su libro.

Varios años más tarde, Cantor llega al mismo concepto general de función en su trabajo publicado en 1895-1897.

Por otro lado, siguiendo los pasos de Weierstrass, Dedekind busca la aritmetización del análisis. Con el objetivo de reconstruir el razonamiento intuitivo sobre el cual se ha basado Cauchy, Dedekind analiza el concepto de continuidad de números reales. El define entonces el principio de continuidad de la siguiente manera:

"Si todos los puntos de la recta son repartidos en dos clases, tal que todo punto de la primera clase sea situado a la izquierda de todo punto de la segunda clase, existe uno y solo un punto que opera esta repartición de todos los puntos en dos clases, cortando la recta en dos porciones." [12, p93]

Este principio constituye el pasaje de una concepción geométrica intuitiva de la continuidad de los números reales a una formulación que excluye el lenguaje geométrico. Este principio que Dedekind admite pero que no demuestra sirve para introducir la noción de cortadura.

1.4.10 GASTON DARBOUX (1842-1917).

Habiendo estudiado la definición de la integral de Riemann, Darboux dedujo directamente la existencia de funciones continuas que no tienen derivadas.

En el primer parágrafo de sus Memorias Sobre Funciones Discontinuas, Darboux, en 1875, define la continuidad en un punto de esta manera:

"Una función f(x) se dice continua, para el valor $x=x_0$ cuando uno puede tomar h suficientemente pequeño de tal forma que

$$\mathbf{f(x_0 \pm \theta\, h) - f(x_0) < \varepsilon}$$

en valor absoluto, θ puede tomar todos los valores positivos menores que 1 y ε tomado tan pequeño como uno quiera.” [12, p 94]

Y la continuidad sobre un intervalo cerrado de la manera siguiente:

“**Se dice que una función es continua en un intervalo $[x_0,x_1]$, con $x_0<x_1$, cuando ella es continua para todos los valores de x comprendidos entre x_0 y x_1 y además Lim $f(x_0+h) = f(x_0)$; Lim $f(x_1-h) = f(x_1)$ cuando h tiende a cero para valores positivos. Estas últimas condiciones son satisfechas si la función es continua para los valores x_0 y x_1.**” [12, p 94]

La primera definición es local, mientras que la segunda es global. Ellas son consideradas como las dos primeras definiciones más exactas, dadas hasta la fecha, de la continuidad de una función numérica de una variable real. Además, es la primera vez que aparece una definición de la continuidad de una función sobre un intervalo cerrado.

1.4.11 GOTTLOB F. FREGE (1848-1925).

Las ideas de Frege acerca del concepto de función son expuestas en su libro “Funktion an Begriff” publicado en 1891.

El acercamiento de Frege fue radicalmente diferente a todos estos hasta ahora considerados: El introdujo el concepto de función sin alguna definición y explicación, esto sólo contenía descripciones, digresiones históricas y ejemplos.

Frege tomó el concepto de función como un concepto primitivo no definido y definió otros en términos de éste, incluyendo el concepto de una relación.

1.5 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XX.

Según escribe Michel Spivak : "El concepto más importante de la matemática es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con gran generalidad". [12, p 185]

Las definiciones actuales del concepto de función se basan formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet.

A partir de mediados del siglo XIX el estudio de la teoría de funciones se ha desarrollado con rapidez y hoy es muy grande el número de sus especialistas; pero esta se puede clasificar en tres orientaciones: La que inició Riemann descomponiendo las funciones complejas en sus elementos reales; la de los discípulos de Weierstrass que analizan la estructura íntima de la correspondencia entre la variable y la función, y por último; la establecida por P. Painlevé poco antes de morir (1933) quien, en vez de dar la ley que enlaza la causa con el efecto, supone conocida las relaciones entre los cambios infinitamente pequeños de las causas y los cambios, también infinitamente pequeños, que sufren sus efectos.

Entre los más destacados cultivadores del inmenso continente de la teoría de funciones (en el que todavía hay muchas regiones inexploradas) figuran los siguientes: Baire, Borel, Boutroux, Julia, Lebesgue, Picard, Frechet, Montiel, Blumenthal, Gunter, Molk, Bocher, Volterra, Riesz, Leidelöf, y otros.

Finalmente, en 1939 en la obra "Elementos de la Matemática" cuyo colectivo de autores (un grupo de matemáticos, fundamentalmente franceses) aparece bajo el seudónimo común de Nicolás Bourbakí, dedicado a las estructuras fundamentales del análisis, se encuentra la siguiente definición de función:

"Sean E y F dos conjuntos, los cuales pueden ser o no distintos. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F es una relación funcional en y, o relación funcional de E hacia F, si para todo x perteneciente a E, existe un único y perteneciente a F." [16, p 54]

Se da el nombre de función a toda operación que asocia a todo elemento x de E, el elemento y de F que se encuentra en la relación dada con x. Se dice que y es el valor de la relación funcional.

El concepto de función parece estar firmemente basado en la teoría de conjuntos, término en el cual, la idea de una relación funcional entre dos conjuntos está representado como un subconjunto del producto cartesiano E x F.

CAPÍTULO II

LA FUNCIÓN DE CANTOR

Este capítulo tiene por objeto estudiar el conjunto y la función de Cantor. Esta última servirá como contraejemplo a la idea de que la gráfica de una función continua en un intervalo está formada de un solo trozo. A continuación presentamos una reseña histórica, en la cual ofrecemos, a grandes rasgos, una descripción de las ideas que motivaron sus descubrimientos y una hipótesis relativa a como Cantor dio con ellos.

2.1 Reseña Histórica

Hay muy pocos datos referentes a la historia del conjunto y la función de Cantor. En lo particular, Cantor no fue el primero en descubrir el conjunto de Cantor. Más aún, a pesar de que el descubrimiento original del conjunto de Cantor tenía un enfoque geométrico, el descubrimiento de Cantor del conjunto y la función de Cantor no estaba motivado por la geometría, ni involucraba la geometría, aunque es así que estos elementos son frecuentemente introducidos. De hecho, Cantor posiblemente dio con ellos mediante un razonamiento puramente aritmético.

El estudio sistemático de la topología del conjunto de puntos de la recta real se originó durante el periodo 1870-1885 cuando los matemáticos investigaban dos problemas:

1. Las condiciones bajo las cuales una función podía ser integrada y
2. La unicidad de las series trigonométricas.

Fue dentro del marco de estas investigaciones que los dos descubrimientos, aparentemente independientes, del conjunto de Cantor fueron hechos. Cada descubrimiento está ligado a uno de estos dos problemas.

Bernhard Riemann invirtió un tiempo considerable en la primera pregunta, y surgieron condiciones, que según él, podrían proporcionar una respuesta. Un paso importante en esta dirección fue el trabajo de Hermann Hankel (1839-1873) a principios del año 1870. Hankel mostró a través de las formulaciones de Riemann que la integrabilidad de una función depende de la naturaleza de ciertos conjuntos de puntos relacionados a la función.

El razonamiento de Hankel se basaba en su creencia de que conjuntos de la forma $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ eran prototipos de todos los subconjuntos nunca densos de la recta real. Trabajando bajo este criterio, Hankel proclamó que todo subconjunto nunca denso de la recta real podía ser encerrado por intervalos de longitud arbitrariamente pequeña.

Aunque la investigación de Hankel dentro de la naturaleza de ciertos conjuntos de puntos llegaría a ser extremadamente importante, fue la ignorancia de sus planteamientos en cuanto a los conjuntos infinitos (en particular, conjuntos nunca densos) lo que lo condujo por mal camino. No fue hasta que se descubrió que los conjuntos nunca densos podían tener un contenido exterior positivo, que la importancia de los conjuntos insignificantes, en el sentido de medición, fue reconocida. El descubrimiento de los conjuntos nunca densos con contenido exterior positivo fue hecho por H. J. S. Smith, profesor de geometría en Oxford, en un artículo publicado en 1875. Después de una exposición sobre la integración de funciones discontinuas, Smith presentó un método para construir conjuntos nunca densos que eran más importantes que los conjuntos $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. Específicamente él observó lo siguiente:

"Sea m cualquier entero mayor que 2. Divida el intervalo [0,1] en m partes iguales; y quite el último segmento de cualquier división subsiguiente. Divida cada uno de los m-1 segmentos restantes en m partes iguales; y quite los últimos segmentos de cualquier división subsiguiente. Si esta operación continua indefinidamente, obtenemos un número infinito de puntos de división sobre el intervalo [0,1]." [8,p137]

En terminología moderna, Smith afirma que los intervalos extraídos son abiertos, así que el conjunto resultante es cerrado. Este conjunto, hoy día, se conoce como el conjunto general de Cantor y esta parece ser la primera publicación registrada de tal conjunto.

Seguidamente, en el mismo documento, Smith demuestra que dividiendo los intervalos mencionados anteriormente en el n-ésimo paso en m^n partes iguales y quitando el último segmento de cada subdivisión obtenemos un conjunto nunca denso con contenido exterior positivo.

Es importante observar que en una reseña editorial en la conclusión del artículo de Smith dice: "Este documento, a pesar de que no fue leído, fue ofrecido a la sociedad y aceptado de manera usual". De hecho, este documento pasó inadvertido entre los matemáticos del continente europeo y desafortunadamente el descubrimiento crucial de Smith reposó desconocido. Su redescubrimiento tomo cerca de una década, con ideas similares por Cantor, con el fin de ilustrar las dificultades en la teoría contemporánea de integración e iniciar la evolución de la teoría de la medida.

Georg Cantor llegó al estudio de la topología de los puntos de un conjunto después de completar una tesis sobre teoría de números en Berlín en 1867. Él empezó trabajando con E. Heine, en la Universidad de Halle, sobre la pregunta de la unicidad de series trigonométricas.

Durante los años 1879-1884 Cantor escribió una serie de artículos titulados "**Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten**" que contenían el primer estudio sistemático de la topología del conjunto de puntos de la recta real. En esta serie de artículos Cantor introduce tres términos importantes. En el primer artículo de esta serie Cantor define lo que es un conjunto denso en todas partes, un término cuyo uso aún es común. Él presentó algunos ejemplos, incluyendo el conjunto de números de la forma $\frac{2^{n+1}}{2^m}$, donde m y n son enteros. En el quinto artículo de estas series Cantor habla de la partición de un conjunto en dos componentes que él nombró reducible y perfecto.

Después de introducir el término perfecto en el quinto artículo, Cantor estableció que los conjuntos perfectos no necesariamente son densos en todas partes. En la nota de pie de página de este documento Cantor introduce el conjunto que ha llegado a conocerse como el conjunto ternario de Cantor. El conjunto de números reales de la forma

$$x = \frac{c_1}{3} + \ldots + \frac{c_v}{3^v} + \ldots$$

donde c_v es 0 ó 2.

Durante el tiempo en que Cantor estuvo trabajando en los apuntes de "**Punktmannichfaltigkeiten**", otros trabajaban en la extensión del teorema fundamental del cálculo para funciones discontinuas. Cantor cita este aspecto en una carta fechada en noviembre de 1883, en la cual él define el conjunto de Cantor tal como lo definió en el documento mencionado anteriormente. No obstante, en la carta él pasa a definir la función de Cantor, la primera aparición conocida de esta función. Esta función es primero definida en el complemento del conjunto de Cantor como la función cuyos valores son

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{u-1}}{2^{u-1}} + \frac{2}{2^u}\right)$$

Los trabajos de Lagrange han jugado un gran papel en el desarrollo de los fundamentos del análisis y de la elaboración de una teoría de funciones independientes de cantidades infinitamente pequeñas. El título de su tratado es un testimonio de sus esfuerzos: "Teoría de Funciones Analíticas, conteniendo los principios del cálculo diferencial, liberado de cualquier consideración de infinitesimales o límites que desaparecen y de fluxiones reducidos al análisis algebraico de cantidades infinitas".

Lagrange trata de sistematizar toda la práctica del análisis algebraico del siglo XVIII para dar a los matemáticos bases rigurosas. En la misma perspectiva formalista de Euler, él funda su tentativa sobre la teoría del desarrollo de funciones en series de potencia.

En la Teoría de Funciones Analíticas, Lagrange presenta la siguiente definición:

"Llamamos función de una, o varias cantidades a cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos sólo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes." [12, p 79]

Lagrange hace la observación que esta definición de función es más general que aquella dada por los primeros analistas:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq 1$$

Recíprocamente, todo número de $[0,1]$ admite un desarrollo decimal ternario; por ejemplo, si $x = 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

Mostremos que todo número $x \in [0,1[$ posee una expansión ternaria. En efecto, sean $x \in [0,1[$ y $A = \{0,1,2\}$. Dividamos $[0,1[$ en tres intervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$:

$$I_{1,0} = \left[0, \frac{1}{3}\right[; \quad I_{1,1} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[; \quad I_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right[$$

es decir :

$$I_{1,k} = \left[\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right[. \quad \text{con } k \in A.$$

Entonces existe un único $k_1 \in A$ tal que $x \in I_{1,k_1}$,por consiguiente

$$\frac{k_1}{3} \leq x < \frac{k_1+1}{3}$$

Dividamos I_{1,k_1} en tres intervalos disjuntos, de longitud $\frac{1}{3^2}$:

$$I_{2,0} = \left[\frac{k_1}{3}, \frac{k_1}{3} + \frac{1}{3^2}\right[; \quad I_{2,1} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{k_1}{3} + \frac{2}{3^2}\right[; \quad I_{2,2} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{2}{3^2}, \frac{k_1+1}{3}\right[$$

es decir,

$$I_{2,k} = \left[\frac{k_1}{3}+\frac{k}{3^2}, \frac{k_1}{3^2}+\frac{k}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right[, \text{ con } k\in A.$$

Luego existe un único $k_2 \in A$ tal que $x \in I_{2,k_2}$; por lo tanto

$$\frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3^2} \leq x < \frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3^2}+\frac{1}{3^2}.$$

Repitiendo este proceso n veces encontramos n números $k_1, k_2,..., k_n \in A$ tales que:

$$\frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3^2}+...+\frac{k_n}{3^n} \leq x < \frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3^2}+...+\frac{k_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}$$

Observemos ahora que, evidentemente, la sucesión

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{3^j}$$

es monótona, creciente y acotada superiormente por x, luego $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y

además

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq x$$

Pero

$$0 \leq x - S_n \leq \left[\frac{k_1}{3}+\frac{k_2}{3^2}+...+\frac{k_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right] - S_n = S_n + \frac{1}{3^n} - S_n = \frac{1}{3^n}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x - S_n) = 0$$

y en consecuencia

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{3^j} \quad , \text{ con } k_j \in A, \text{ para todo número natural } j.$$

Hemos probado así que cada $x \in [0,1]$ admite un desarrollo decimal ternario:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad , \text{ con } a_n \in A$$

Es costumbre indicar el desarrollo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ por

$$x = 0.a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$$

Por ejemplo:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 0.22\ldots$$

y

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{3^n} = 0.00\ldots$$

Es interesante observar que el desarrollo de $\frac{1}{4}$ es:

$$\frac{1}{4} = 0.020202\ldots$$

en efecto :

$$0.020202\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = \frac{\frac{2}{3^2}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{4}$$

Algunos elementos de $[0,1]$, pueden admitir dos desarrollos distintos, por ejemplo:

$$0.022\ldots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \cdot$$

como también

$$\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\ ,\ \text{con } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$$

Así pues

$$\frac{1}{3} = 0.100\ldots = 0.022\ldots$$

De la misma forma se tiene que

$$\frac{1}{3^2} = 0.0100\ldots = 0.0022\ldots$$

En general, para cada número natural k se tiene que:

$$\frac{1}{3^k} = 0.\underbrace{00\ldots000}_{k-1\,\text{posiciones}}10\ldots = \frac{0}{3}+\ldots+\frac{0}{3^{k-1}}+\frac{1}{3^k}+\frac{0}{3^{k+1}}+\ldots$$

y

$$\frac{1}{3^k} = 0.\underbrace{0\ldots000}_{k-\text{posiciones}}22\ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

En efecto, demostremos la última expresión, es decir:

$$\frac{1}{3^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}.$$

Tenemos que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} - \sum_{n=1}^{k}\frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} - 2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Por otro lado

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^k} \quad (1)$$

y

$$3\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n} = 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{k-1}} \quad (2)$$

restando (1) de (2) obtenemos:

$$2\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^k} = \frac{3^k-1}{3^k}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3^k-1}{3^k} = \frac{3^k-3^k+1}{3^k} = \frac{1}{3^k}$$

es decir

$$\frac{1}{3^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

A partir de este resultado podemos observar que también esto ocurre para cualquier número irreductible de la forma $x=\frac{a}{3^n}$, con $a\in\{1,\ldots\ldots,3^n-1\}$; por ejemplo.

$$\frac{22}{3^5} = \frac{7(3)+1}{3^5} = \frac{7}{3^4}+\frac{1}{3^5} = \frac{2(3)+1}{3^4}+\frac{1}{3^5} = \frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}$$

luego

$$\frac{22}{3^5} = 0.0021100...$$

Por otro lado

$$\frac{2}{3^3} = 0.00200...$$

$$\frac{1}{3^4} = 0.000100...$$

y

$$\frac{1}{3^5} = 0.0000022...$$

luego

$$\frac{22}{3^5} = \frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5} = 0.00210222...$$

de la misma forma se tiene que:

$$\frac{2}{3} = 0.200... = 0.122...$$

$$\frac{11}{3^8} = 0.0000010200... = 0.0000010122...$$

$$\frac{5}{9} = 0.1200... = 0.1122...$$

En el caso general $x = \frac{a}{3^n}$, podemos escribir a en la forma:

$$a = \alpha_1 3^{n-1} + \alpha_2 3^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} 3^2 + \alpha_{n-1} 3 + \alpha_n$$

donde $\alpha_i \in A$; $i = 1, \ldots, n-1$, $\alpha_n \in \{1,2\}$ ($\alpha_n \neq 0$, pués hemos supuesto que $\frac{a}{3^n}$ es irreductible). Ahora si $\alpha_n = 1$:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} = \begin{cases} 0.\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} 100\ldots \\ 0.\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} 022\ldots \end{cases}$$

si $\alpha_n = 2$:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} = \begin{cases} 0.\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} 200\ldots \\ 0.\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} 122\ldots \end{cases}$$

2.3 El Conjunto de Cantor.

El conjunto de Cantor y las funciones definidas sobre él son muy útiles, particularmente para la construcción de contraejemplos. El conjunto ternario de Cantor o simplemente el conjunto de Cantor fue exhibido por G. Cantor (1845-1918) como una ilustración de ciertas cosas curiosas que pueden ocurrir con conjuntos de puntos sobre la recta real. Algunas de las propiedades de este conjunto, como veremos, desafían la intuición geométrica.

Presentamos a continuación la construcción y propiedades del conjunto de Cantor.

Sea $F = [0,1]$, entonces:

1) Se retira de F el intervalo abierto $I_{1,1} = \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$, correspondiente al segundo tercio. Quedarán dos intervalos cerrados disjuntos

$$J_{1,1} = \left[0,\frac{1}{3}\right] \quad \text{y} \quad J_{1,2} = \left[\frac{2}{3},1\right]$$

pongamos

$$P_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] = \bigcup_{k=1}^{2^1} J_{1,k}$$

$$V_1 = \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[= \bigcup_{k=1}^{2^{1-1}} I_{1,k}$$

es claro que P_1 es cerrado y V_1 es abierto. Gráficamente obtenemos:

2) De cada uno de los dos $(2^1 = 2)$ intervalos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$ se retira el intervalo abierto correspondiente al segundo tercio. Quedarán cuatro $(2^2 = 4)$ intervalos cerrados disjuntos

al retirarse los intervalos abiertos disjuntos

$$I_{2,1} = \left]\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right[\quad , \quad I_{2,2} = \left]\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right[$$

Pongamos

$$P_2 = \bigcup_{k=1}^{2^2} J_{2,k} \quad \text{y} \quad V_2 = \bigcup_{k=1}^{2^{2-1}} I_{2,k} \cup V_1$$

Es evidente que P_2 es cerrado y V_2 es abierto. Gráficamente obtenemos:

3) En la n-ésima operación, en cada uno de los 2^{n-1} intervalos cerrados de la operación anterior

$$J_{n-1,1}, \ldots, J_{n-1,2^{n-1}}$$

se retira el intervalo abierto correspondiente al segundo tercio:

$$I_{n,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots I_{n,2^{n-1}} \quad (2^{n-1} \text{ intervalos})$$

Subsisten $2^{n-1}\,2 = 2^n$ intervalos cerrados

$$J_{n,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots J_{n,2^n}$$

Ponemos

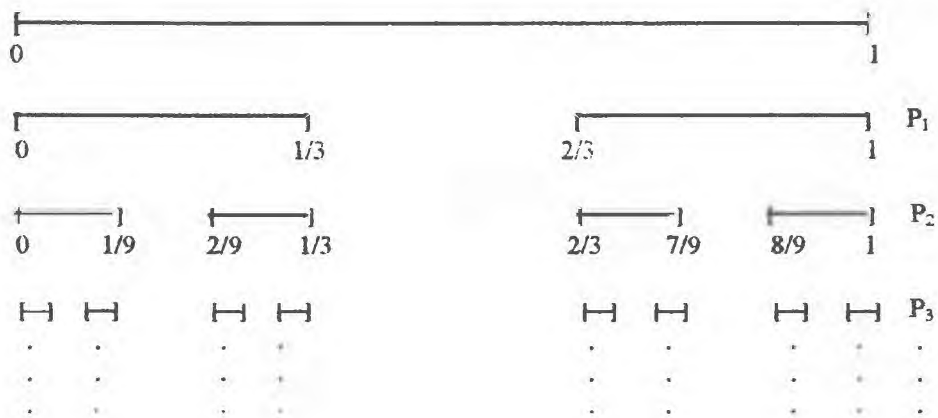
$$P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k} \quad \text{y} \quad V_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} \cup V_{n-1}.$$

Es claro que P_n es cerrado y V_n es abierto.

Por definición, el conjunto triádico de Cantor es

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$$

Gráficamente el proceso de construcción del conjunto C queda descrito así:



Es decir C es lo que resta de $[0,1]$ al efectuar todas las operaciones posibles del tipo descrito anteriormente; en otras palabras al remover de $[0,1]$ todos los intervalos abiertos de la forma:

$$\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$$

$$\left]\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right[\ ,\ \left]\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right[$$

$$\left]\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right[\ ,\ \left]\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right[\ ,\ \left]\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right[\ ,\ \left]\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right[$$

La pregunta natural es ¿Qué puntos quedan? Es decir ¿Qué puntos componen C ?

Es claro que C contiene los puntos extremos de los intervalos $J_{n,k}$ que componen P_n:

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2},\frac{7}{3^2},\dots$$

Sin embargo C contiene muchísimos más puntos que los indicados, como veremos en lo que sigue. En efecto, probaremos que

$$C = \{\, x\in[0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = 0.a_1,a_2,\dots,\ \text{con } a_n\in\{0,2\}\text{,para todo } n\geq 1 \,\}$$

Examinemos el complemento de P_n : Sea $x = 0.a_1a_2\dots$ (escrito en base 3) un elemento de [0,1], entonces

$$x\in I_{1,1} \iff \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

$$\iff 0.022\ldots < 0.a_1a_2\ldots < 0.122\ldots$$

$$\iff a_1 = 1$$

$$x\in\bigcup_{k=1}^{2} I_{2,k} \iff x\in I_{2,1} \quad \text{v} \quad x\in I_{2,2}$$

$$\iff \frac{1}{3^2} < x < \frac{2}{3^2} \quad \text{v} \quad \frac{7}{3^2} < x < \frac{8}{3^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.01000\ldots < 0.a_1a_2\ldots < 0.0200\ldots \\ \vee \\ 0.2100\ldots < 0.a_1a_2\ldots < 0.2200\ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \wedge a_2 = 1 \\ \vee \\ a_1 = 2 \wedge a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 \neq 1 \wedge a_2 = 1$$

En general:

$$x \in \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} \Leftrightarrow a_1 \neq 1 \text{ , } a_2 \neq 1 \text{ , } \ldots \text{ , } a_{n-1} \neq 1 \wedge a_n = 1 \text{ .}$$

Observemos ahora que si x es un punto extremo de algún $J_{n,k}$, y por lo tanto un elemento de C, entonces x se escribe en la forma

$$x = \frac{a}{3^n} \text{ para algún } a \in \{0, 1, \ldots, 3^n - 1\}$$

luego

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{3^n} \quad \text{, con } \alpha_n \in \{0,2\},$$

ya que ningún α_i , i=1,......,n-1, puede ser igual a 1, pues en ese caso x pertenecería a algún $I_{m,k}$ y en consecuencia $x \notin C$. Por lo tanto:

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n 00\ldots = \begin{cases} 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}00\ldots \\ 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}200 \end{cases}$$

De todo lo anterior resulta que : para todo $x \in [0.1]$, $x = 0.a_1a_2\ldots$

$$x \in V_n \Leftrightarrow \text{existe un } j,\ j \leq n \text{ tal que } a_j = 1.$$

Por lo tanto

$$x \in P_n \Leftrightarrow a_1 \neq 1\ ,\ a_2 \neq 1\ ,\ \ldots,\ .a_n \neq 1.$$

En consecuencia

$$x \in C \Leftrightarrow a_n \neq 1 \ \text{ para todo } n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow a_n \in \{0,2\} \ \text{ para todo } n \geq 1$$

Así pues:

$$C = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0.a_1a_2\ldots \ \text{ con } a_n \in \{0,2\}, \text{ para todo } n \geq 1\ \}.$$

En particular resulta que $\frac{1}{4} = 0.020202\ldots$ es un elemento del conjunto de Cantor y

que no es un punto extremo de algún $J_{n,k}$ (pues no es de la forma $\frac{a}{3^n}$).

También $x = \frac{1}{13}$ es un elemento de C, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n}} = \dfrac{\frac{2}{3^3}}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{2}{3^3 - 1} = \frac{1}{13}$

luego

$$\frac{1}{13} = 0.002002\ldots \in C$$

En general, en C están todos los números de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3^k)^n} = \frac{2}{3^k - 1} \quad ; \quad k = 1,2,\ldots$$

o sea, todas las fracciones de la forma $\frac{1}{q}$ que son equivalentes a las fracciones

$$\frac{2}{3^k - 1}$$

También pertenecen a C:

$$\frac{1}{39} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n+1}} = 0.000200200200\ldots$$

$$\frac{1}{117} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n+2}} = 0.00002002002\ldots$$

así como

$$\frac{1}{39} + \frac{2}{3} = \frac{9}{13} = 0.2002002002\ldots$$

$$\frac{1}{117} + \frac{2}{9} = \frac{3}{13} = 0.02002002002$$

$$\frac{9}{13} + \frac{3}{13} = \frac{12}{13} = 0.22022022022\ldots$$

y muchísimos números más

Estamos ahora en condiciones de examinar otras propiedades del conjunto C.

Teorema 2.3.1: C es un subconjunto compacto de R.

Demostración: Por construcción $C = \bigcap_{r}^{\infty} P_n$, luego C es cerrado por ser intersección de cerrados; pero C también es acotado pues es un subconjunto de [0,1]; en consecuencia, C es compacto.

Teorema 2.3.2: El interior de C es vacío $(\overset{\circ}{C} = \phi)$.

Demostración: Supongamos que $\overset{\circ}{C} \neq \phi$, luego existe un $x \in C$ y $\varepsilon > 0$ tal que $I = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\subseteq C$, por lo tanto $I \subset P_n$ para todo $n \geq 1$. Por la propiedad arquimedeana, existe $n_0 \in N$ tal que $0 < \varepsilon = |I| > \frac{1}{2^{n_0+1}}$. Luego para todo $n \geq n_0$ se tiene que $I_n = [x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}] \subset I$ con $|I_n| > \frac{1}{2^n}$; pero esto es una contradicción, pues P_n no puede tener intervalos con longitud mayor que $\frac{1}{2^n}$. Así pues, $\overset{\circ}{C} = \Phi$ ■

Teorema 2.3.3: El conjunto de Cantor C es no enumerable.

Demostración: Supongamos que C es enumerable, luego, $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Consideremos el número $c = 0.a_1a_2\ldots$, en forma ternaria, de la siguiente manera:

$$a_1 = \begin{cases} 2 & \text{si el primer decimal de } c_1 \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el primer decimal de } c_1 \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 2 & \text{si el segundo decimal de } c_2 \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el segundo decimal de } c_2 \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

.
.
.

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si el n-ésimo decimal de } c_n \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 0 \\ 0 & \text{si el n-ésimo decimal de } c_n \text{ ,escrito en forma ternaria, es } 2 \end{cases}$$

En conclusión se tiene que $c \in C$ y $c \neq a_n$ para todo $n \geq 1$, lo cual es una contradicción. Así pues, C es un conjunto no enumerable. ∎

Introducimos ahora dos conceptos que son de mucha utilidad en lo que sigue

Definición 2.3.1: Sean A un subconjunto de los números reales y $x \in R$. Se dice que x es un punto de acumulación del conjunto A si toda vecindad de x contiene puntos de A distintos de x. Es decir, para toda vecindad V de x se cumple que

$$(V-\{x\})\cap A \neq \Phi$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto A se le llama el derivado de A y se representa por A'.

Definición 2.3.2: Sea A un subconjunto de los números reales. Al conjunto

$$\overline{A} = A \cup A'$$

se le llama clausura o adherencia de A y sus elementos reciben el nombre de puntos de adherencia de A.

Teorema 2.3.4: C es un conjunto perfecto, es decir, C es cerrado y cada punto de C es de acumulación de C.

Demostración: Sabemos que C es cerrado. Sea $x \in C$ y demostremos que x es un punto de acumulación de C. En efecto, sea V una vecindad de x, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$$

Escojamos $n_0 \geq 1$ de modo que $\dfrac{1}{3^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y consideremos

$$P_{n_0} = \bigcup_{k=1}^{2^{n_0}} J_{n_0,k} \quad \text{, donde } |J_{n_0,k}| = \frac{1}{3^{n_0}}$$

Como $x \in C$ se tiene que $x \in P_{n_0}$, por lo tanto existe un k_{n_0} tal que $x \in J_{n_0,k_{n_0}}$. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} x \in J_{n_0,k_{n_0}} \\ |J_{n_0,k_{n_0}}| = \dfrac{1}{3^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; x \in J_{n_0,k_{n_0}} \subseteq \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq V$$

Mas aun, los puntos extremos de $J_{n_0,k_{n_0}}$, que son elementos de C, también pertenecen a V y en consecuencia :

$$\left(V-\{x\}\right)\cap C \neq \Phi$$

para toda vecindad V de x, es decir, x es un punto de acumulación de C. ∎

2.4 La Función de Cantor

Se define la función f: C → [0,1], llamada la función de Cantor, por la regla:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{2^i} \quad \text{donde } r_i=\frac{1}{2}a_i$$

Es decir, si x es un elemento de C teniendo expansión ternaria $x = 0.a_1a_2...$ donde $a_i = 0$ ó 2 , entonces f(x) es el número cuya expansión binaria (base 2) es $0.r_1r_2...$ donde $r_i = \frac{1}{2}a_i$.

Características de f.

1. f es suryectiva.

Demostración: En efecto, sea $y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{2^i}$ un elemento de $[0,1]$ y sea $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$

donde $a_i=2r_i$. Como $r_i\in\{0,1\}$ entonces $a_i\in\{0,2\}$, por lo tanto

$$x\in C \text{ y } f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{2^i}=y,$$

lo cual prueba la suryectividad de f. ∎

2. Si $I=(x\,,y)$, con $x<y$, es uno de los intervalos abiertos extraídos en el n-ésimo paso, en la construcción geométrica del conjunto de Cantor, entonces $f(x)=f(y)$.

Demostración: En el primer paso se extrae el intervalo $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$

En el segundo paso se extraen los intervalos $\left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[$ y $\left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[$ los cuales se pueden expresar como

$$\left]\frac{1}{3^2}+\frac{b_1}{3},\frac{2}{3^2}+\frac{b_1}{3}\right[\text{ con } b_1=0 \text{ ó } 2.$$

En el tercer paso se extraen los intervalos $\left]\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right[$, $\left]\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right[$, $\left]\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right[$ y $\left]\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right[$, los cuales se pueden expresar como

$$\left]\frac{1}{3^3}+\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2},\frac{2}{3^3}+\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}\right[\text{ con } b_1 \text{ y } b_2=0 \text{ ó } 2.$$

En el n-ésimo paso se extraen 2^{n-1} intervalos los cuales se pueden escribir como

$$\left]\frac{1}{3^n}+\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{3^{n-1}},\frac{2}{3^n}+\frac{b_1}{3}+\frac{b_2}{3^2}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{3^{n-1}}\right[\quad \text{con } b_i=0 \text{ ó } 2$$

es decir

$$\left]\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i},\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right[\quad \text{con } b_i=0 \text{ ó } 2$$

Mostremos que $f\left(\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right)=f\left(\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right)$, $b_i=0$ ó 2

En efecto, si $\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}=0.b_1b_2\ldots b_{n-1}200\ldots$ entonces

$$f\left(\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right)=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}100\ldots$$

$$=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}+0.\underbrace{00\ldots00}_{n-1\text{ veces}}100\ldots$$

$$=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}+\frac{1}{2^n}$$

Por otro lado, si $\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}=0.b_1b_2\ldots b_{n-1}022\ldots$ entonces

$$f\left(\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right)=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}011\ldots$$

$$=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}+0.\underbrace{00\ldots00}_{n-\text{veces}}11\ldots$$

$$=0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots$$

$$= 0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

$$= 0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\ldots\frac{b_{n-1}}{2} + \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto

$$f\left(\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right) = f\left(\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}\right) \quad \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 2 \,\blacksquare$$

Los números $\frac{1}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}$ y $\frac{2}{3^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3^i}$ $b_i = 0$ ó 2 pertenecen a C.

3. f es creciente sobre C; es decir, si $x,y \in C$, con $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$

Demostración: Sean $x=0.x_1x_2\ldots$ y $y=0.y_1y_2\ldots$ dos elementos de C y supongamos que $x<y$.

Si x y y son extremos de los intervalos extraídos en la construcción del conjunto de Cantor, entonces, $f(x)=f(y)$.

Si este no es el caso, entonces existe un entero positivo k tal que

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2, \quad \ldots \quad x_{k-1} = y_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k = 0 < y_k = 2$$

Por consiguiente

$$f(x) = 0.\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\ldots \qquad \text{y} \qquad f(y) = 0.\frac{y_1}{2}\frac{y_2}{2}\ldots$$

de donde

$$\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{2} \;,\; \frac{x_2}{2} = \frac{y_2}{2} \;,\ldots,\; \frac{x_{k-1}}{2} = \frac{y_{k-1}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x_k}{2} = 0 < \frac{y_k}{2} = 1$$

Por lo tanto $f(x) < f(y)$. En conclusión, se tiene que f es creciente. ▪

Anteriormente demostramos que la función de Cantor tiene el mismo valor en los dos extremos de cada intervalo suprimido en la construcción del conjunto de Cantor. Si tomamos este valor como valor constante de la función f en este intervalo, podemos extender la función de Cantor a todo el intervalo $[0,1]$. De esta manera, f será creciente sobre $[0,1]$.

El siguiente teorema, referente a las funciones crecientes, es de vital importancia para el estudio de la función de Cantor

Teorema 2.4.1: Sea $g: [a,b] \to R$ una función creciente. Si g es suryectiva sobre $[g(a), g(b)]$ entonces es continua en $[a,b]$.

Demostración: Supongamos que g no es continua en $[a,b]$. Entonces existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que g es discontinua en x_0. Luego, como g es creciente se tiene que

$$g(x_0-) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} g(x-h) \quad y \quad g(x_0+) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} g(x+h)$$

existen y además $g(x_0-) < g(x_0+)$. Por lo tanto, existe un número racional $r(x_0)$ tal que

$$g(x_0-) < r(x_0) < g(x_0+)$$

y que no es imagen de ningún número $x \in [a,b]$, (ya que se esta suponiendo que g es creciente y discontinua) lo cual es contradictorio, pues, g es suryectiva. Luego, se tiene que g es continua en $[a,b]$. ■

Teorema 2.4.2: La función de Cantor es continua en $[0,1]$.

Demostración: Como la función de Cantor es creciente y suryectiva en $[0,1]$, por el teorema anterior, es continua en $[0,1]$. ■

Otra manera de definir la función de Cantor (extendida a todo $[0,1]$) es como sigue:

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ los conjuntos removidos de $[0,1]$ para formar el conjunto de Cantor, esto es:

$$E_1 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$$

$$E_2 = \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$$

$$E_3 = \left]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right[\cup \left]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right[\cup \left]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right[\cup \left]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right[$$

Definamos las funciones crecientes y continuas h_n: $[0,1]\rightarrow[0,1]$ de la siguiente manera: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n-1}$ los subintervalos de $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ arreglados en orden creciente. Por ejemplo, si n = 3

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \left]\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right[\cup \left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right[\cup \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right[\cup \left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[\cup \left]\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right[$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$$

Se define

$$h_n(0) = 0$$

$$h_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{si } x \in A_k \quad , \quad k=1,2,\ldots, 2^n-1$$

$$h_n(1) = 1$$

y lineal sobre cada intervalo que queda en el paso n de la construcción de C. Por ejemplo:

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } x \in \left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3},1\right] \end{cases}$$

y

$$h_2(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{4}x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{9}\right] \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right[\\ \dfrac{9x-1}{4} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{9x-4}{4} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{9}\right] \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } x \in \left]\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right[\\ \dfrac{9x-5}{4} & \text{si } x \in \left[\dfrac{8}{9}, 1\right] \end{cases}$$

Las gráficas de h_1 y h_2 son mostradas en la figura 4.1. Notemos que si $x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$ entonces $h_1(x) = h_2(x)$ y si $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ entonces

$$|h_1(x) - h_2(x)| < \frac{1}{2^2}$$

Mostremos que $\{h_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$. En efecto, por construcción, cada h_n es monótona creciente; $h_{n+1} = h_n$ sobre A_k, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$ y $|h_n(x) - h_{n-1}(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ sobre cada intervalo de C. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(h_n - h_{n-1})$

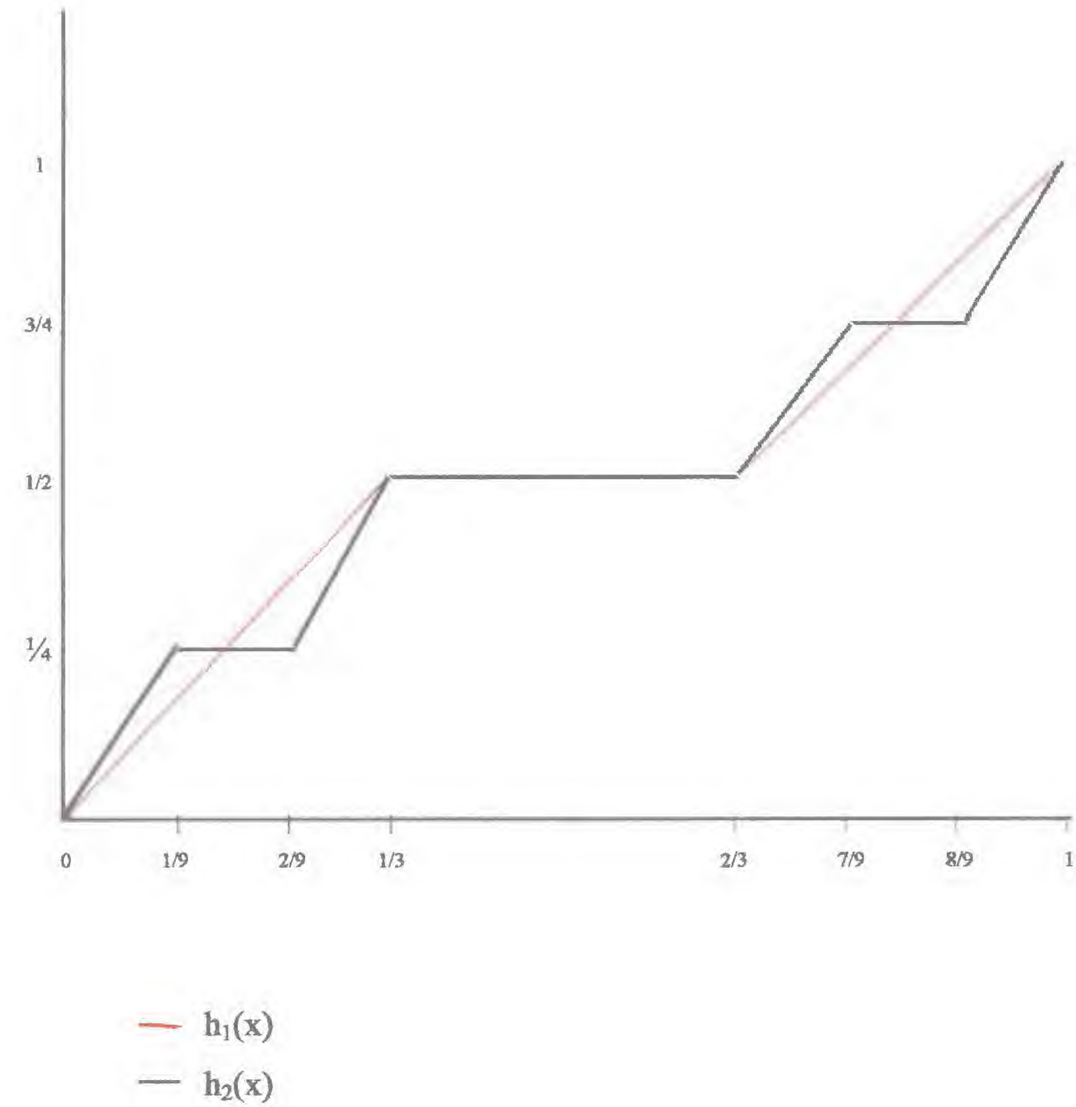


Fig 4.1

converge uniformemente sobre [0,1], y por consiguiente, por el M-test de Weierstrass, $\{h_n\}$ converge uniformemente sobre [0,1]. Si

$$h = \lim_{n\to\infty} \{h_n\}$$

entonces ésta función límite es la función de Cantor extendida a [0,1], pues, h(0)=0, h(1)=1, h es monótona creciente y continua sobre [0,1] y es constante sobre cada intervalo extraído en la construcción del conjunto de Cantor. Además, no es difícil probar que h(x)=f(x) para todo x en los extremos y el interior de los intervalos extraídos en la construcción de el conjunto de Cantor.

Probemos que h(x) = f(x) para todo $x\in C$. En efecto, sea $x\in C$; luego, para cada $n\in N$ existe un k, $1\leq k\leq 2^n-1$, tal que

$$y_1 \leq x \leq y_2$$

donde

$$A_k = (y_1^*, y_1) \quad , \quad A_{k+1} = (y_2 , y_2^*)$$

y los A_k son los intervalos extraídos en el paso n en la construcción del conjunto de Cantor (ver la definición de la función h_n). Como las funciones h_n y f son crecientes se tiene que

$$h_n(y_1) \leq h_n(x) \leq h_n(y_2)$$

y

$$f(y_1) \leq f(x) \leq f(y_2).$$

Además,

$$f(y_1) = h(y_1) = h_n(y_1) = \frac{k}{2^n}$$

y

$$f(y_2) = h(y_2) = h_n(y_2) = \frac{k+1}{2^n}.$$

De lo anterior se deduce que

$$| f(x) - hn(x) | \leq \frac{1}{2^n}$$

por consiguiente,

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in C$. Hemos probado así que $f = h$.

Con la función de Cantor se muestra cuánto se ha avanzado en el desarrollo del concepto de función a partir de la idea elemental de que una función continua "es aquella cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel".

Queda de manifiesto que la continuidad no es una propiedad de la gráfica sino del nexo funcional. Sin embargo, cada vez que se pueda graficar la función no debe descartarse el recurrir a la gráfica para obtener información.

CAPÍTULO III

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE DISCONTINUIDADES DE UNA FUNCIÓN

Nuestro objetivo en este capítulo es demostrar que no existe una función $f:R \to R$ que sea

- continua en cada número racional
- discontinua en cada número irracional

Hemos escogido este problema pues él contribuye de manera sustancial a esclarecer como la estructura del dominio de una función hace (o no) posible la existencia de una función con determinadas características.

3.1 Cardinalidad y Enumeralidad

Primeramente demostraremos que el conjunto Q de los números racionales y el conjunto de puntos donde una función monótona es discontinua son conjuntos enumerables. Para ello damos la siguiente definición:

Definición 3.1.1: Sean A y B dos conjuntos. A y B tienen la misma cardinalidad (o son coordinables) si existe una función biyectiva f de A en B.

Si A y B son coordinables escribiremos $A \sim B$.

Es sencillo verificar que la relación " ~ " de coordinabilidad es una relación de equivalencia sobre la clase de conjuntos.

Definición 3.1.2: Si $J_n = \{1,2,...,n\}$ y N es el conjunto de los números naturales diremos que:

i) A es finito si existe un $n \in N$ tal que $A \sim J_n$

ii) A es infinito si A no es finito.

iii) A es enumerable (o contable) si $A \sim N$ o si A es finito.

iv) A es no enumerable si A no es finito ni $A \sim N$.

Ejemplo: El conjunto Z de los números enteros es enumerable ($N \sim Z$), pues la función $f : N \to Z$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{si n es impar} \\ -\dfrac{n}{2} & \text{si n es par} \end{cases}$$

es biyectiva.

Teorema 3.1.1: Si B es un subconjunto infinito de N, entonces $B \sim N$

Demostración: Como $B \neq \Phi$, B posee primer elemento el cual denominamos por b_1. Como $B-\{b_1\} \neq \Phi$, él posee primer elemento el cual denominamos por b_2. Como $B-\{b_1, b_2\} \neq \Phi$, él posee primer elemento el cual denominamos por b_3. Procediendo de esta forma, para cada $n \in N$ existe b_n primer elemento de $B-\{b_1,b_2,...,b_{n-1}\}$.

Definamos la función $f: N \to B$ por

$$f(n) = b_n.$$

Por la unicidad del primer elemento, f es inyectiva. Sea $b \in B$, entonces el conjunto

$$H = \{z \in B \text{ tal que } z < b\}$$

es un conjunto finito de N. Luego

$$H = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \text{ donde } k \in N.$$

Como b es el primer elemento de $B-\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, se tiene que $b = b_{k+1}$, así

$$f(k+1) = b_{k+1} = b$$

lo que prueba que f es suryectiva. Por consiguiente, $B \sim N$. ∎

Teorema 3.1.2: Sea A un conjunto infinito. $A \sim N$ si, y solo si, existe una función inyectiva f de A en N.

Demostración: Supongamos que $A \sim N$; luego existe una función biyectiva f de A en N, por lo tanto f es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que existe $f: A \to N$ inyectiva. Luego, $f: A \to f(A) \subset N$ es biyectiva; por lo tanto

$$A \sim f(A) \qquad (1)$$

Por otro lado, como f(A) es un subconjunto infinito de N, por el teorema anterior

$$f(A) \sim N \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $A \sim N$. ∎

Probaremos a continuación que el conjunto NxN es enumerable.

Teorema 3.1.3: $N x N \sim N$

Demostración: La función $f\colon NxN \rightarrow N$ definida por $f(n,m) = 2^n \times 3^m$ es inyectiva.

En efecto, supongamos que $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$

$$\Rightarrow 2^{n_1} \times 3^{m_1} = 2^{n_2} \times 3^{m_2}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n_1 - n_2} = 3^{m_1 - m_2}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 - n_2 = 0 \ \text{ y } \ m_2 - m_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1 = n_2 \ \text{ y } \ m_2 = m_1$$

$$\Rightarrow \quad (n_1, m_1) = (n_2, m_2)$$

Lo que prueba que f es inyectiva. Por el teorema anterior $N \times N \sim N$. ∎

Corolario 3.1.1: Si A es enumerable entonces A x A es enumerable.

Demostración: Como A es enumerable existe una función biyectiva $f\colon N \rightarrow A$.

Entonces lo elementos de A se pueden expresar como una sucesión:

$$x_1, x_2, \ldots$$

donde $x_n = f(n)$. Es claro que el conjunto A x A está formado por todas las parejas (x_n, x_m) con $x_n, x_m \in A$; es decir,

$$AxA = \{ (x_n, x_m) / n,m \in N \}$$

Utilizando la biyección f: N → A obtenemos la biyección

$$\varphi: NxN \to AxA$$

definida por

$$\varphi(n, m) = (f(n), f(m))$$

lo que muestra que NxN ~ A x A y como NxN ~ N se tiene que AxA ~ N. ∎

De acuerdo al corolario anterior ZxZ ~ N y como todo subconjunto infinito de un conjunto enumerable es enumerable, también $ZxZ^* \sim N$ donde $Z^* = Z - \{0\}$.

Estamos listos para demostrar que Q es enumerable.

Teorema 3.1.4: El conjunto Q de los números racionales es enumerable.

Demostración: Sabemos que Q = { $\frac{a}{b}$ *tal que* $a,b \in Z$, $b \neq 0$ } donde a y b son primos relativos (no tienen factores comunes). Definamos la función inyectiva f: Q→Z x Z* por $f\left(\frac{a}{b}\right) = (a.b)$. Como ZxZ* ~ N, luego existe g: ZxZ* → N biyectiva, por lo tanto, la función compuesta $g \circ f$: Q→N es inyectiva, de donde, por el teorema 3.1.2, se tiene que $Q \sim N$. Así, el conjunto Q de los números racionales es enumerable. ∎

Continuando con nuestro propósito, demostraremos ahora que el conjunto de puntos donde una función monótona es discontinua también es un conjunto enumerable.

Teorema 3.1.5: Sea $f: (a,b) \to R$ una función monótona. Entonces el conjunto formado por los puntos de discontinuidades de f es enumerable.

Demostración: Supongamos que f es creciente. Sea $x \in (a,b)$ tal que f es discontinua en x. Luego, como f es creciente se tiene que $f(x-)$ y $f(x+)$ existen y $f(x-) < f(x+)$, es decir f tiene una discontinuidad de salto en x (recordemos que $f(x+) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x+h)$ y $f(x-) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x-h)$). Tomemos un número racional $r(x)$ tal que

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Sea $D = \{x \in (a\ ,\ b) : f \text{ es discontinua en } x\}$. Supongamos que D es infinito y definamos la función

$$r: D \to Q$$

por

$$x \to r(x).$$

Probemos que r es inyectiva. En efecto, sean $x_1,x_2 \in D$, con $x_1 < x_2$. Como f es creciente $f(x_1) \leq f(x_2)$. Por otro lado tenemos que

$$f(x_1 -) < f(x_1 +) \leq f(x_2 -) < f(x_2 +)$$

entonces

$$f(x_1 -) < r(x_1) < f(x_1 +) \leq f(x_2 -) < r(x_2) < f(x_2 +)$$

Luego

$$r(x_1) < r(x_2) \;\text{ y }\; r(x_1) \neq r(x_2)$$

por lo tanto r es inyectiva. De esta manera establecemos una correspondencia entre el conjunto D de las discontinuidades de f y una parte de Q, que es enumerable. Así D es enumerable. ∎

Para f decreciente se prueba en forma similar.

Corolario 3.1.2: Sea $f: [a,b] \rightarrow R$ una función monótona. Entonces el conjunto de las discontinuidades de f es enumerable.

Demostración: Es trivial, pues solo se están introduciendo, a lo sumo, dos discontinuidades más ($x=a$ y $x=b$) así que el conjunto sigue siendo enumerable. ∎

Vamos a profundizar en la dirección del teorema anterior. Para ello demostraremos el siguiente teorema

Teorema 3.1.6: Sea f: [a,b] $\rightarrow$ R una función creciente y sea

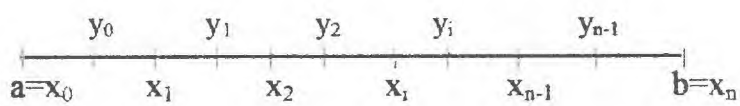
$$P: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

una partición del intervalo [a,b]. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i+) - f(x_i-)] \leq f(b) - f(a).$$

Demostración: Tomemos y_0 , y_1 ,..., y_{n-1} de la siguiente manera:

$$a < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < b$$



Entonces

$$f(x_i+) \leq f(y_i) \quad y \quad f(y_{i-1}) \leq f(x_i-)$$

Por lo tanto

$$f(x_i+) - f(x_i-) \leq f(y_i) - f(y_{i-1})$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i+) - f(x_i-)] \leq \sum_{i=1}^{n-1} [f(y_i) - f(y_{i-1})]$$

$$= f(y_{n-1}) - f(y_0)$$

$$\leq f(b) - f(a). \blacksquare$$

A partir de la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i+) - f(x_i-)] \leq f(b) - f(a)$$

podemos dar otra demostración del teorema 3.1.5. En efecto, para cada $m \in N$, definamos el conjunto S_m por:

$$S_m = \{x \in (a,b) \text{ tal que } f(x+) - f(x-) > \frac{1}{m}\}$$

Sean $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \in S_m$. Entonces

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i+) - f(x_i-)] > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{m} = \frac{n-1}{m}$$

o sea

$$n\text{-}1 \leq m[f(b) - f(a)]$$

por lo tanto, el cardinal de S_m es menor o igual a $m[f(b) - f(a)]$, con lo cual se tiene que S_m necesariamente debe ser un conjunto finito. Luego, como el conjunto de las discontinuidades de f en (a,b) es

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$$

y como los S_m son finitos, se tiene que D es enumerable.

3.2 Oscilación de una Función

Definamos ahora el concepto de oscilación de una función, el cual será de suma importancia en lo que sigue.

Definición 3.2.1: Sea $f: R \to R$ una función y sea $T \subset R$. La oscilación de f sobre T se denota por $W(f, T)$ y se define por :

$$W(f, T) = \sup \{f(x) - f(y) : x,y \in T\}.$$

Propiedades de $W(f, T)$.

1. Si $T_1 \subset T_2 \subset R$ entonces $W(f, T_1) \leq W(f, T_2)$.

Demostración: Si $T_1 \subset T_2$ entonces

$$\{f(x) - f(y) : x,y \in T_1\} \subset \{f(x) - f(y) : x,y \in T_2\}$$

luego

$$\sup\{f(x)-f(y) : x,y \in T_1\} \leq \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in T_2\}$$

con lo cual se tiene que

$$W(f, T_1) \leq W(f, T_2).$$

2. $W(f, T) \geq 0$

Demostración: Sean $x,y \in T$. Si $f(x_1) - f(y_1) \leq 0$ entonces $f(y_1)-f(x_1) \geq 0$; luego

$$\sup\{f(x_1) - f(y_1), f(y_1) - f(x_1)\} \geq 0$$

por lo tanto

$$0 \leq \sup\{f(x_1)\text{-}f(y_1), f(y_1)\text{-}f(x_1)\} \leq \sup\{f(x)\text{-}f(y) : x,y \in T\} = W(f, T).$$

A continuación definiremos la oscilación de una función en un punto.

Definición 3.2.2: Sean f: $R \to R$ una función y $\varepsilon > 0$. La oscilación de f en $x \in R$ se define como

$$W(f, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} W(f, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)).$$

Si f es acotada en una vecindad de x, entonces el límite anterior existe, ya que $W(f,(x\text{-}\varepsilon,x+\varepsilon))$ es una función de ε, la cual es creciente y acotada por lo tanto el límite lateral existe. Si no existe vecindad de x en la cual f es acotada, entonces $W(f, x) = \infty$.

La noción de oscilación permite una elegante caracterización de la continuidad de una función como lo indica el siguiente teorema

Teorema 3.2.1: Una función f es continua en x_0 si, y sólo si $W(f, x_0) = 0$.

Demostración: Supongamos primeramente que f es continua en x_0, luego dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta}{2}\text{, siempre que } x \in (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 - \varepsilon).$$

Sean $x,y \in (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 + \varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)-f(y)| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &< \delta\end{aligned}$$

Luego

$$W(f\,,\ (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 + \varepsilon)) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 + \varepsilon)\} \leq \delta$$

para todo $\delta > 0$, por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W(f\,,\ (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 + \varepsilon) = W(f\,,\ x_0) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} W(f\,,\ (x_0 - \varepsilon\,,\ x_0 + \varepsilon)) = 0$. Luego, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$W(f\,,\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) < \delta$$

entonces

$$\sup\{f(x) - f(y) : x,y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\} < \delta$$

con lo cual

$$|f(x) - f(y)| < \delta \text{ siempre que } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

En particular para $y = x_0$ se tiene

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \text{ siempre que } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Por lo tanto f es continua en x_0. ■

Teorema 3.2.2: Si f es creciente y discontinua en x entonces

$$W(f, x) = f(x+) - f(x-).$$

Demostración: $f(x+) - f(x-) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x+\varepsilon) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x-\varepsilon)$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} [f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)]$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} W(f, (x-\varepsilon, x+\varepsilon))$$

$$= W(f, x). \blacksquare$$

El concepto de oscilación nos sirve para demostrar algunas propiedades importantes que posee el conjunto de puntos donde una función f es discontinua como veremos a continuación.

Teorema 3.2.3: Sean $f : R \to R$ una función y $\varepsilon > 0$. Definamos el conjunto

$$J_\varepsilon = \{x \in [a,b] \text{ tal que } W(f, x) \geq \varepsilon\}.$$

Entonces J_ε es un conjunto cerrado.

Demostración: Si $J_\varepsilon = \Phi$ no hay nada que probar, pues, Φ es cerrado. Supongamos entonces que $J_\varepsilon \neq \Phi$. Sea x_0 un punto de acumulación de J_ε y supongamos que $x_0 \notin J_\varepsilon$. Luego existe $r > 0$ tal que :

$$W(f, (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]) < \varepsilon$$

Por lo tanto ningun punto del intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ pertenece a J_ε, es decir:

$$J_\varepsilon \cap (x_0 - r, x_0 + r) = \Phi$$

Luego x_0 no es punto de acumulación de J_ε lo que contradice la hipótesis planteada. Por consiguiente $x_0 \in J_\varepsilon$, es decir J_ε es cerrado. ∎

Corolario 3.2.1: Sean $f: R \rightarrow R$ una función y $\varepsilon > 0$. Entonces el conjunto

$$A_\varepsilon = \{x \in [a,b] \text{ tal que } W(f, x) < \varepsilon\}$$

es abierto.

Demostración: Como $A_\varepsilon = J_\varepsilon^c$ y J_ε es cerrado entonces A_ε es abierto . ∎

Teorema 3.2.4: Sea $f: R \rightarrow R$ una función. Entonces el conjunto de puntos de discontinuidad de f puede expresarse como una unión enumerable de conjuntos cerrados.

Demostración: Sea $D = \{x \in R \mid f \text{ es discontinua en } x\}$. Probemos que donde $J_{\frac{1}{n}}$ es definido como en el Teorema 3.2.3.

En efecto,

$$\begin{aligned} x\in D &\Rightarrow W(f, x) > 0 \\ &\Rightarrow \text{existe } n_0\in N \text{ tal que } W(f, x) > \frac{1}{n_0} \\ &\Rightarrow x\in J_{\frac{1}{n_0}} \\ &\Rightarrow x\in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x\in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\frac{1}{n}} &\Rightarrow \text{existe } x_0 \text{ tal que } x\in J_{\frac{1}{n_0}} \\ &\Rightarrow W(f, x) > 0 \\ &\Rightarrow f \text{ no es continua en } x \\ &\Rightarrow x\in D \end{aligned}$$

luego

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\frac{1}{n}} \subset D \qquad (2).$$

De (1) y (2) se obtiene la igualdad deseada, es decir

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\frac{1}{n}} \;\; \blacksquare$$

Este teorema suministra una descripción del conjunto de discontinuidades de una función f: R → R. Pero todavía esta descripción no es suficientemente fina para indicarnos porqué no existe una función f: R→R continua en Q y discontinua en R-Q. Tenemos que penetrar más en la estructura topológica de los conjuntos Q y R-Q, el cual es el objetivo de la siguiente sección.

3.3 Categorías de Baire

En esta sección vamos a penetrar en la naturaleza de los espacios métricos completos, mediante la demostración del teorema de categoría de Baire, cuyas consecuencias son de largo alcance.

Definición 3.3.1: Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Diremos que A es denso en X si todo punto $x \in X$ es un punto adherente de A, es decir, si $\bar{A} = X$.

Teorema 3.3.1: Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es denso en X.

ii) $A \cap O \neq \Phi$, para todo subconjunto abierto y no vacío O de X

Demostración: $i \Rightarrow ii$) Sea $O \neq \Phi$ un abierto de X, luego existe un $x \in O$. Por lo tanto O es una vecindad de x. Como $x \in \bar{A}$ se tiene que $O \cap A \neq \Phi$.

$ii \Rightarrow i$) Sea $x \in X$ y sea O un abierto de X tal que $x \in O$. Luego, por ii $A \cap O \neq \Phi$. Esto implica que $x \in \bar{A}$ y por lo tanto $X \subset \bar{A}$, por consiguiente, como siempre $\bar{A} \subset X$ se tiene que $\bar{A} = X$. ▪

El caso más interesante de conjunto denso es el de un abierto denso. En cierto sentido es el conjunto "más lleno" que podemos tener. Su complemento es muy flaco. La siguiente definición trata de este tipo de conjuntos.

Definición 3.3.2: Un subconjunto S de un espacio métrico X es **magro** o **nunca denso** en X si su complemento X - S contiene un abierto denso en X.

Los siguientes son ejemplos de conjuntos nunca densos:

1. El conjunto Z de los números enteros es nunca denso en R ya que Z^c es un abierto denso en R.
2. El conjunto C de Cantor es nunca denso en [0,1], ya que, C es cerrado, por lo tanto, C^c es un abierto denso en [0, 1] (ver Teoremas 2.3.1 y 2.3.2).

Teorema 3.3.2: En un espacio métrico X las siguientes condiciones son equivalentes:

i) S es nunca denso en X.

ii) El interior de la cerradura de S es vacía, o sea $\mathring{\overline{S}} = \Phi$

iii) $X - \overline{S}$ es denso en X; esto es, $\overline{X - \overline{S}} = X$.

iv) $\overline{S}$ no contiene vecindades en X; esto es, si $x \in X$ entonces cualquier vecindad S_ε de x contiene algunos puntos de $X - \overline{S}$.

Demostración: $i \Rightarrow ii$) Supongamos que S es nunca denso en X, entonces existe un abierto denso B en X tal que $B \subset S^c$; esto implica que $S \subset B^c$, por consiguiente,

$$\overline{S} \subset \overline{B^c} = \left(\mathring{B}\right)^c = B^c \quad (\text{ya que } \mathring{B} = B).$$

Luego

$$\mathring{\overline{S}} \subset \left(\mathring{B^c}\right) = \left(\overline{B}\right)^c = X^c = \Phi$$

Por lo tanto

$$\mathring{\overline{S}} = \Phi$$

$ii \Rightarrow i$) Supongamos que $\mathring{\overline{S}} = \Phi$, luego $\left(\mathring{\overline{S}}\right)^c = \Phi^c = X$; o sea $\overline{\left(\overline{S}\right)^c} = X$. Por lo tanto $\left(\overline{S}\right)^c$ es abierto y denso en X. Mostremos que. $\left(\overline{S}\right)^c \subset S^c$

En efecto, como $S \subset \bar{S}$ se tiene que $(\bar{S})^c \subset S^c$. Así pues, S es nunca denso en X.

ii$\Leftrightarrow$iii) $\overset{\circ}{\bar{S}} = \Phi \Leftrightarrow \left(\overset{\circ}{\bar{S}}\right)^c = \Phi^c$

$$\Leftrightarrow \overline{(\bar{S})^c} = X$$

$$\Leftrightarrow \overline{X - \bar{S}} = X$$

$\Leftrightarrow$ X - $\bar{S}$ es denso en X.

iii$\Rightarrow$iv) Supongamos que $\overline{X - \bar{S}} = X$ y sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Si $\bar{S}$ contiene una vecindad abierta $S_\varepsilon(x)$ ($\bar{S} \supset S_\varepsilon(x)$), entonces

$$X - \bar{S} \subset X - S_\varepsilon(x)$$

y puesto que $X - S_\varepsilon(x)$ es un conjunto cerrado se sigue que:

$$\overline{X - \bar{S}} \subset \overline{X - S_\varepsilon(x)} = X - S_\varepsilon(x) \subsetneq X$$

lo cual contradice la hipótesis, luego $\bar{S}$ no puede contener vecindades en X.

iv$\Rightarrow$iii) Si $\bar{S}$ no contiene vecindades en X, entonces cada punto x en $\bar{S}$ es un punto de acumulación de X-$\bar{S}$: pues, si $x \in \bar{S}$ entonces cada vecindad de x debe contener infinitos puntos de X-$\bar{S}$ ya que de otra manera $\bar{S}$ contendría una vecindad. Así x está en la clausura de X-$\bar{S}$, probando que $\overline{X - \bar{S}} \supset \bar{S}$. Por lo tanto obtenemos

$$X = \bar{S} \cup X - \bar{S} = \overline{X - \bar{S}}\ . \blacksquare$$

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los espacios métricos completos. Con objeto de abreviar su enunciado, conviene introducir antes una definición

Definición 3.3.3: (Propiedad de Encajamiento de Cantor). Se dice que un espacio métrico (X,d) posee la propiedad de encajamiento de Cantor, si toda sucesión $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados y encajados ($F_n \supset F_{n+1}$) de X satisfaciendo

$$\lim_{n \to \infty} (\text{diámetro } F_n) = 0$$

tiene un y sólo un punto en su intersección.

Teorema 3.3.3: Un espacio métrico (X,d) es completo si, y solo si, posee la propiedad de encajamiento de Cantor.

Una hermosa y profunda aplicación del teorema anterior la constituye el famoso resultado de Baire, cuyas consecuencias son muy ricas y aparecen en las teorías matemáticas más diversas y avanzadas.

Como se verá a continuación, su demostración se basa en la propiedad de encajamiento de Cantor.

Teorema 3.3.4: (de Baire) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de un espacio métrico completo X, entonces $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X.

Demostración: Debemos probar que si $x \in X$ y si $\delta > 0$ entonces hay un punto $y_\delta \in G$ con $d(x, y_\delta) < \delta$. El punto y_δ es obtenido como la intersección de una sucesión de esferas cerradas, encajadas cuyos diámetros tienden a cero.

Sean $x \in X$, $\delta > 0$ y $S_\delta(x)$ una esfera abierta centrada en x y radio δ. Puesto que G_1 es denso en X, hay un punto x_1 en el conjunto abierto $G_1 \cap S_\delta(x)$. Escojamos un número r_1 de modo que

$$0 < r_1 < \frac{\delta}{2}$$

y

$$(1) \qquad S_1 = \overline{S_{r_1}(x_1)} \subset G_1 \cap S_\delta(x) \quad \text{(ver fig 3.1)}$$

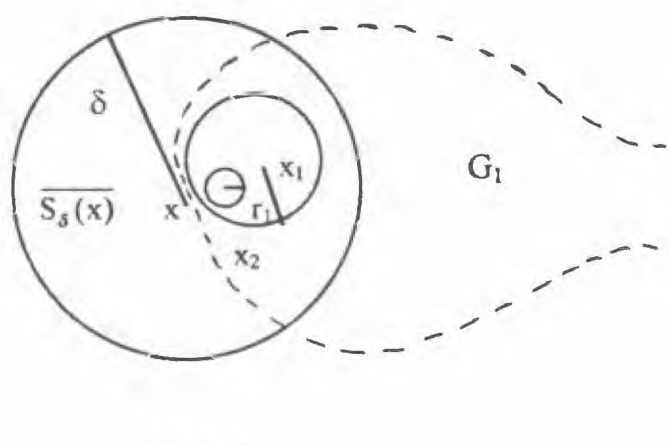


fig 3.1

Puesto que G_2 es también denso en X, hay un punto x_2 en el conjunto abierto $G_2 \cap S_{r_1}(x_1)$ y un número r_2 tal que

$$0 < r_2 < \frac{\delta}{2^2}$$

con

$$(2) \quad S_2 = \overline{S_{r_2}(x_2)} \subset G_2 \cap S_1$$

Continuando de esta manera, una sucesión $\{S_n\}$ de esferas cerradas, encajadas es construída, cuyos diámetros tienden a cero y que satisfacen:

$$(3) \quad S_n \subset G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \cap S_\delta(x)$$

Como el espacio X es completo, la intersección de la sucesión de esferas cerradas y encajadas $\{S_n\}$ es un único punto el cual denotamos por y_δ, con lo cual $y_\delta \in G$. Mas aun, como $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \cap S_\delta(x)$ es un conjunto abierto, y_δ es un punto interior de $S_\delta(x)$, por lo tanto de (3) se concluye que $d(x, y_\delta) < \delta$. ∎

Definición 3.3.4: Un espacio métrico X es de primera categoría si puede ser escrito como una unión enumerable de subconjuntos nunca densos en X. En caso contrario es llamado de segunda categoría.

Un espacio métrico X es de segunda categoría si no es de primera categoría.

Presentamos a continuación algunas propiedades que poseen los conjuntos de primera y segunda categoría, las cuales no son dificil de probar:

Propiedad 1: El conjunto vacío es de primera categoría.

Propiedad 2: Todo subconjunto enumerable de R es de primera categoría.

Propiedad 3: Toda unión contable de conjuntos de primera categoria es de primera categoría.

Propiedad 4: Si X es de segunda categoría y $X = S \cup T$, entonces S ó T es de segunda categoría.

El teorema de Baire puede ser reescrito como sigue:

Teorema 3.3.5: Un espacio métrico completo (X, d) es de segunda categoría.

Demostración: Supongamos que X es de primera categoria, entonces existe una sucesión de conjuntos $\{S_n\}$ nunca densos en X tal que $X = \bigcup S_n$. Si cada conjunto S_n es reemplazado por su clausura, obtenemos $X = \bigcup \overline{S_n}$; donde los $\overline{S_n}$ son subconjuntos cerrados nunca densos de X; Por lo tanto, los conjuntos

$$G_n = X - \overline{S_n}$$

son abiertos y densos en X. Por el Teorema 3.3.4, se tiene que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, y por lo tanto no vacío, si X es no vacío. No obstante, la igualdad $X = \bigcup \overline{S_n}$ implica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap (X - \overline{S_n}) = X - \bigcup \overline{S_n} = \Phi$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto un espacio métrico completo es de segunda categoría . ∎

Como hemos dicho anteriormente un <u>abierto</u> <u>denso</u> es un conjunto "muy obeso"; pero un conjunto denso, a secas, puede ser "flaco". Por ejemplo, los números racionales constituyen un conjunto denso, pero su interior es vacío; es decir, no hay ningún intervalo constituído plenamente por números racionales.

El conjunto Q es de primera categoría, pues, se puede expresar como una unión enumerable de conjuntos nunca densos. En efecto, si

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

es una enumeración de los números racionales, entonces

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$$

donde cada $\{r_n\}$ es un conjunto nunca denso.

Por otro lado, probaremos a continuación que el conjunto de los números irracionales es de segunda categoría.

Teorema 3.3.6: El conjunto R-Q de los números irracionales es de segunda categoría.

Demostración: Como el conjunto R de los números reales es un espacio métrico completo, por el teorema de Baire, él es de segunda categoría. Además, como

$$R = Q \cup (R\text{-}Q)$$

y Q es de primera categoría, por la Propiedad 4, se concluye que R-Q es de segunda categoría . ∎

De todo lo anterior, se concluye que no puede existir una función f:R→R cuyo conjunto de discontinuidades sea exactamente el conjunto R-Q de los números irracionales; ya que de existir, el conjunto de puntos de discontinuidad de f, es decir, R-Q se puede expresar como una unión enumerable de conjuntos cerrados (Teorema 3.2.4); por ejemplo

$$R - Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ , con } F_n \text{ cerrado.}$$

Como $F_n \subset$ R-Q y F_n es cerrado se tiene que

$$\overline{F_n} = F_n \subset R - Q$$

y

$$\overset{\circ}{\overline{F_n}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{R - Q}} = \Phi .$$

Asi, cada F_n es nunca denso; o sea que R-Q se escribe como una unión enumerable de conjuntos nunca densos, lo que contradice el teorema 3.3.6, el cual afirma que R-Q es de segunda categoría.

De esta manera, observamos cómo la profundización en el estudio de la estructura topológica de los conjuntos Q y R-Q nos permite obtener un resultado importante en el análisis; el cual evitará que estudiantes y profesores cometan el error de afirmar que sí puede existir una función f: R→R continua en el conjunto de los números racionales y discontinua en los irracionales.

CONCLUSIÓN

Hasta principios del siglo XVII la noción de función estaba implícita en los escritos de las civilizaciones antiguas. Las curvas eran estudiadas por sus propiedades geométricas o por una descripción verbal de una propiedad específica.

El siglo XVII es el pasaje de la concepción geométrica intuitiva de la noción de función a una concepción algebraica gracias a la aplicación, por Fermat y Descartes, del álgebra a la geometría. Es en este siglo que la representación de una función en la forma de una expresión analítica, una fórmula, gradualmente llega a ser el método principal de definir una función.

Es en siglo XVIII que empieza a forjarse el carácter independiente del análisis con relación a la geometría y al álgebra. El reconocimiento de las funciones en lugar de las curvas como objeto de estudio permite la gradual aritmetización del análisis y su consecuente separación de la geometría. Sin embargo, la concepción geométrica no desaparece; ella reaparece cuando era necesario discutir sobre el tipo de función a admitir en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. No es hasta el siglo XIX, cuando se hallaron funciones continuas no diferenciables en ninguna parte, que se produce la ruptura definitiva del análisis con la geometría para convertirse en un estudio puramente analítico.

Por tal motivo, concluimos que el tratar la gráfica de una función como un objeto concreto para abstraer conclusiones puede llevar a cometer errores, como el pensar que la gráfica de toda función continua está hecha de un solo pedazo o que los puntos de discontinuidades de una función forman un conjunto discreto. Cuando se estudian funciones definidas sobre conjuntos muy particulares cuyas gráficas no se pueden representar geométricamente en su totalidad, lo anterior no necesariamente es cierto, como se demostró en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. ARCIA, I. y MONTENEGRO, H. (1994). Leonardo Euler, Consolidación del Concepto de Función; Siglo XVIII. Tésis. Universidad de Panamá.

2. ASH, R. B. (1972). Real Analysis and Probability. Editors: Academic Press Inc. San Diego California.

3. BARTLE, R.G. (1991). Introducción al Análisis Matemático. Editorial Limusa, S.A. México.

4. BOTTAZZINI, H. (1986). The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York Berlin Heidelberg. Print in the United States of America, p.p.332

5. BOYER, C. (1994). Historia de la Matemática. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Universitaria Texto.

6. CLEMENT, J. (1985). Microconceptions in Graphiny. Proceedings of the ninth International Conference for the Psichology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

7. EDWARS JR., C.H. (1979). The Historical Development of the Calculus. Springer, Verlag; New York.

8. FLERON, J.. (1994). A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function. Mathematics Magazine. An Official Publication of The MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. Vol. 67. Washington, D.C. pags 136-140

9. FLORES, E.; y VÁSQUEZ, D. (1990). Un Estudio Sobre la Continuidad y su Representación Gráfica. Tésis. Universidad de Panamá.

10. GUINNES, G. (1984). Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos , 1630-1910: Una Introducción Histórica. Alianza Editorial, S.A. Madrid España.

11. HAASER, N. y SULLIVAN, J. (1991) Real Analysis. Duver Publications, Inc. New York.

12. El BOUAZZAOUI, H. (1988). Conceptions Des Eleves et Does Professeurs a Propos de la Notion de Continuité D'Une Fonction. Universite Laval.

13. HARD, G. and ED Dubinsky (Ed).(1992). The Concept de Function Aspect of Epistemology and Pedagogy. M.A.A. Notes, Volumen 25.

14. HAWKINS, T. (1975). Lebesgue's Theory of Integration. Chelsea Publishing Company. New York, p.p.227.

15. HERNÁNDEZ, J. y CASTILLO de, G. (1995). Un Estudio Sobre el Uso del Concepto de Función entre Estudiantes Universitarios de Ciencias Naturales. Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba. págs 65-69.

16. HIDALGO, E. (1995). Evolución del Concepto de Función. Primer Encuentro Nacional, Oct. 27-29 de 1995. 1ra.Ed. págs: 51-56.

17. IRIBARREN, I. (1987). Topología de Espacios Métricos. Editorial Limusa, S.A. México, D.F.

18. JAIN, P.K. y GUPTA, V.P. (1986). Lebesgue Measure and Integration. Wiley Eastern Limited. New Delhi.

19. KLEINER, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, College Mathematics Journal, 20, 283-330

20. MAY, K.O. (1953). A Kind of Problem that Effestively Test Familiarity with Funtional Relations. American Mathematical Monthly, p.624 vol.60

21. MEDREDEV, F (1991). Scenes from the History of Real Functions. Translated from the Russian by Roger Cooke. Birkhauser Verlag Basel.

22. PHILLI, C. Note Historique: Extraits d'une Note de Mlle Christine Phili de l'Université d'Athenes sur "Le Developpment du Concept de Fonction"

23. PHILLPS, E. (1984). An Introduction to Analysis and Integration Theory. Dover Edition U.S.A.

24. RIBNIKOV, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro. Editorial Mir, Moscú.

25. RUDIN, W. (1980). Principios de Análisis Matemático. McGraw-Hill Book. México.

26. RUÍZ, L. (1993). Concepciones de los Alumnos de Secundaria Sobre la Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico. Tésis Doctoral. Granada (España).

27. SCHWINGENDORFF, K; HAWKS, J. y BEINEKE, J. (1992). Horizontal and Vertical Growth of the Student`s Conception of Function. The Concept of Functions: Aspects of Epitemology and Pedagogy. M.A.A. pags 133-149

28. SFARD, A. (1989). Transition from Operational to Structural Conceptions: The Notion of Function Revisited. Proceeding of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Paris, University of Paris.

29. SIERPINSKA, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. The Concept of Function: Aspects of Epitemology and Pedagogy. M.A.A, pag 25-58.

30. STRUIK, D.J. (1986). Historia Concisa de las Matemática. Serie Maestros del Pensamiento Científico. México.

31. VERA, F. (1961). Breve Historia de la Matemática. Editorial Losada, S.A. Buenos Aires.

32. WHEEDEN, R.L. (1977). Measure and Integral an Introduction to Real Analysis. Marcel Dekker,Inc. New York.